AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
ZENTRALINSTITUT FÜR KYBERNETIK UND INFORMATIONSPROZESSE

ZKI-INFORMATION

Kurzfassungen der Vorträge zur
6. Arbeitstagung
„Entwurf von Schaltsystemen"
5. – 8. 4. 1976
in Dresden

Berlin
April 1976

Zech, K.-A. (INT Berlin)

Algebraisierung eines Verfahrens von Kohavi und Lavallee zum Entwurf prüfgünstiger Automaten

Gegenwärtig stellt die rationelle Prüfung digitaler Schaltungen ein bedeutendes wirtschaftliches Problem dar. Oft werden jedoch in Unkenntnis prüftechnischer Erfordernisse oder durch hohe Bewichtung anderer Parameter digitale Schaltungsentwürfe nicht prüffreundlich gestaltet.

1967 schlugen Kohavi und Lavallee in ihrer grundlegenden Arbeit /1/ ein Verfahren vor, durch eine zusätzliche Ausgabelogik einen gegebenen Automaten in einen prüfgünstigen zu überführen. Dieses Verfahren beruht auf graphentheoretischen Betrachtungen.
In diesem Vortrag werden die in /1/ verwendeten Relationen (Paare) durch Überdeckungen repräsentiert, auf die dann die Strukturtheorie von Hartmanis und Stearns anwendbar ist. Auf diese Weise wird der Aufwand beim Entwurf des Testgraphen, des reduzierten Testgraphen sowie beim Festlegen der zusätzlichen Ausgangslogik reduziert.

1. Grundlagen

Wie üblich wird der endliche Automat $A = [X,Y,Z,f,g]$ zugrundegelegt. X ist die Menge der Eingangs-, Y die der Ausgangssignale, Z die Zustandsmenge, $f\colon Z \times X \longrightarrow Z$, $g\colon Z \times X \longrightarrow Y$. Für Wörter p der freien Worthalbgruppe W(X) über X wird definiert:

$$f(z,px) = f(f(z,p),x)\ ,$$
$$g(z,px) = g(z,p)g(f(z,p),x)\ .$$

p aus W(X) heißt Unterscheidungsexperiment (UE) für A, falls für alle z,z' aus Z gilt: $g(z,p) = g(z',p) \longrightarrow z = z'$. A heißt definit unterscheidbar (A ist DD-Automat), falls es ein k derart gibt, daß jedes p aus W(X) mit $l(p) \geq k$ ein UE für A ist. k heißt Ordnung von A.

DD-Automaten lassen sich im automatentheoretischen Sinne sehr gut prüfen /1/. Schaltungen, die DD-Automaten entsprechen, sind demzufolge auch gut prüfbar, und zwar wird erwartet, daß die Verbesserung in der Schaltungsebene sich wesentlich stärker auswirkt (Erzeugung einer Testfolge z.B. mit Hilfe eines erweiterten D-Algorithmus) als auf der Ebene der abstrakten Automaten (Identifizierungsexperiment).

Seien $\underline{L}$ der Verband der Überdeckungen von Z und $\underline{M}$ derjenige der Überdeckungen von $Z \times X$ mit den jeweiligen Operationen $\cdot$ und $+$ (vgl. /2/). Die Elemente aus $\underline{L}$ werden mit $\pi, \tau, \ldots$ bezeichnet, die aus $\underline{M}$ mit $\Phi, \Psi, \ldots$. Jede Überdeckung Φ induziert eine Verträglichkeitsrelation $\equiv(\Phi)$ durch $a \equiv b(\Phi) \longleftrightarrow \exists M(M \in \Phi \wedge a, b \in M)$. Sei $\dot{\equiv}$ die Relation $\equiv$ ohne die identische Relation. Wir verwenden in folgendem nur solche Φ aus $\underline{M}$, bei denen für alle B aus Φ ein x aus X derart existiert, daß $[z,x'] \in B \longrightarrow x' = x$. Φ wird dargestellt durch ein m-Tupel (m=Zahl der Eingangssignale) $\Phi = [\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{m-1}]$, wobei ϱ_x aus $\underline{L}$ ist.

Das Paar $[\Phi, \pi]$ aus $\underline{M} \times \underline{L}$ heißt Überdeckungspaar für A, falls (bei $\Phi = [\varrho_0, \ldots, \varrho_{m-1}]$) gilt: $\forall x \forall M \exists B(x \in X \wedge M \in \varrho_x \wedge B \in \pi \wedge f(M,x) \subseteq B)$. Die Menge $\Delta \subseteq \underline{M} \times \underline{L}$ aller Überdeckungspaare für A ist eine Paaralgebra. Dort ist $M(\pi)$ das maximale Φ mit $[\Phi, \pi] \in \Delta$, $m(\Phi)$ das minimale π mit $[\Phi, \pi] \in \Delta$. Sei $H(\Phi) = \sum\{\varrho_i | i \in X\}$ für $\Phi \in \underline{M}$. Sei ferner $\Phi \cdot \pi = [\varrho_0 \cdot \pi, \ldots, \varrho_{m-1} \cdot \pi]$, $\frac{\pi}{\tau} = \sum\{\varrho | \varrho \cdot \tau \leq \pi\}$ und $\frac{\Phi}{\Psi} = [\frac{\varrho_0}{\sigma_0}, \ldots, \frac{\varrho_s}{\sigma_s}]$, wobei $\Phi = [\varrho_0, \ldots, \varrho_s]$ und $\Psi = [\sigma_0, \ldots, \sigma_s]$.

In Verallgemeinerung von /2/ definieren wir $A^1(\Phi) = \Phi$, $A^{i+1}(\Phi) = \Phi \circ m(A^i(\Phi))$ sowie $T^1(\Phi) = \Phi$, $T^{i+1}(\Phi) = \Phi \cdot M(H(T^i(\Phi)))$. Es gibt Zahlen l, l' derart, daß $A^l(\Phi) = A^{l+1}(\Phi) = \ldots$ sowie $T^{l'}(\Phi) = T^{l'+1}(\Phi) = \ldots$. Dann wird $A^l(\Phi)$ durch $A(\Phi)$ und $T^{l'}(\Phi)$ durch $T(\Phi)$ notiert. Φ heißt Feedbacküberdeckung, falls $A(\Phi) = 0$.

2. Verfahren von Kohavi und Lavallee

Ähnlich wie in /1/ definieren wir den Testgraphen $G = [P, K, IG, TG]$ folgendermaßen: P, die Menge der Knoten, ist die

Menge aller Paare $[[z,x],[z',x]]$ aus $(Z \times X)^2$, für die gilt: $x=x'$, $f(z,x) \neq f(z',x)$ und $g(z,x)=g(z',x)$. Eine Kante aus K verbindet einen Knoten $[[z,x],[z',x]]$ aus P genau dann mit $[[z^{*},x^{*}],[z^{**},x^{*}]]$ aus P, falls $f(z,x) = z^{*}$ und $f(z',x) = z^{**}$. IG ist die Menge der initialen, TG die der terminalen Knoten von G. Zustandsverschmelzungen sind die Paare $[[z,x],[z',x]]$ mit $f(z,x)=f(z',x)$ und $g(z,x)=g(z',x)$. Nach /1/ gilt folgender

<u>Satz 1:</u> A ist genau dann ein DD-Automat, wenn (1) die Menge der Zustandsverschmelzungen leer ist und (2) im Testgraphen keine Zyklen auftauchen.

3. Vereinfachung des Verfahrens durch Anwendung von Δ

Für $x \in \{0,\dots,m-1\} = X$, $Y = \{0,\dots,r-1\}$ sei $\sigma_x = \{B_0,\dots,B_{r-1}\}$ und $\Phi_Y = [\sigma_0,\dots,\sigma_{m-1}]$, wobei $\forall y \forall z (y \in Y \wedge z \in Z \longrightarrow z \in B_y \longleftrightarrow g(z,x) = y)$.

<u>Satz 2:</u> Die Menge aller Zustandsverschmelzungen ist $\stackrel{\cdot}{=}(\Phi_Y \cdot M(0))$, wobei 0 das kleinste Element von $\underline{L}$ ist.

<u>Satz 3:</u> Es ist $P = \stackrel{\cdot}{=}(\Phi_Y \cdot \frac{0}{M(0)})$.

Zur Konstruktion des Testgraphen brauchen also nur die durch die schnell errechenbare Überdeckung $\Phi = \Phi_Y \cdot \frac{0}{M(0)}$ repräsentierten Paare $[[z,x],[z',x]]$ (mit $z \neq z'$) betrachtet zu werden (Bild 2).

<u>Satz 4:</u> $P \setminus IG = \stackrel{\cdot}{=}(\Phi \cdot m(\Phi))$.

Durch Berechnung von $\Phi \cdot m(\Phi)$ erhält man daher alle Knoten von G, die nicht initial sind. Sei $G_0 = G$ und $G_{i+1} = [P_{i+1}, K_{i+1}, IG_{i+1}, TG_{i+1}]$ der Graph, der sich aus G_i $(i \geq 0)$ durch Streichen seiner initialen Knoten ergibt. Allgemein gilt dann:

<u>Satz 5:</u> $\stackrel{\cdot}{=}(A^{i}(\Phi)) = P_{i-1}$, $i=1,2,\dots$

<u>Folgerung 1:</u> Im Testgraphen G existieren genau dann keine Zyklen, wenn Φ Feedbacküberdeckung bezüglich Δ ist.

Folgerung 2: A ist genau dann DD-Automat, wenn $\Phi_Y \cdot M(0) = 0$ und $A(\Phi) = 0$.

Ist $G^0 = G$ und $G^{i+1} = [P^{i+1}, K^{i+1}, IG^{i+1}, TG^{i+1}]$ der Graph, der sich aus G^i, $i \geqslant 0$, ergibt, wenn dessen terminale Knoten gestrichen werden, so gilt:

Satz 6: $\dot{\equiv}(T^i(\Phi)) = P^{i+1}$.

Folgerung 3: In G existieren genau dann keine Zyklen, wenn $T(\Phi) = 0$.

Folgerung 4: $\dot{\equiv}(T(\Phi) \cdot A(\Phi))$ enthält die Menge der an Zyklen beteiligten Knoten.

Zur Untersuchung von A auf Zyklen in dessen Testgraphen G ist also nur der den Paaren $\dot{\equiv}(T(\Phi) \cdot A(\Phi))$ entsprechende Subgraph von G zu erzeugen. Durch die Anwendung der Operatoren A und T wird i.a. die zu unteruchende Paarmenge $\{ [[z,x],[z',x]], \ldots \}$ sehr wesentlich reduziert (Bild 3).

4. Auftrennung der Zyklen im Testgraphen

Durch eine zusätzliche Ausgabe können sowohl (1) die Zustandsverschmelzungen als auch (2) die Zyklen in G beseitigt werden. Die letztgenannte Veränderung ist noch nicht optimal gelöst worden. Bislang ist es nur durch Untersuchung des Testgraphen möglich, eine minimale Zahl aufzutrennender und damit zu beseitigender Knoten in Zyklen zu finden.

Aus dem oben Gesagten ergeben sich für die Lösung des Problems (2) folgende Möglichkeiten:

I. Überführung von $\Psi = T(\Phi)\ A(\Phi)$ in eine maximale Feedbacküberdeckung $\Psi' < \Psi$ mit Hilfe eines modifizierten Algorithmus gemäß /3/. Die Paare $\equiv(\Psi) \setminus \equiv(\Psi')$ sind zu trennen.

II. Man berechne für alle Paare s aus $S = \dot{\equiv}(\Psi)$ die Überdeckung $\tilde{\Psi} = A(\Psi_s) \cdot T(\Psi_s)$, wobei sich Ψ_s durch Streichen von s aus $\dot{\equiv}(\Psi)$ ergibt, sowie die jeweilige Menge $M_s = \equiv(\Psi) \setminus \equiv(\tilde{\Psi})$. $\Omega = \{ M_s | s \in S \}$ überdeckt $\dot{\equiv}(\Psi)$, und es ist eine minimale Zahl von Blöcken aus Ω so zu wählen, daß $\dot{\equiv}(\Psi)$ von ihnen überdeckt wird (Abdeckungsproblem).

Der Ansatz II kann in verschiedenen heuristischen Abwandlungen realisiert werden.

5. Beispiel

Wir betrachten die Schaltung von Bild 1, die dem folgenden Automaten entspricht:

$A = [\{0,1\}, \{0,1\}, \{1,2,\ldots,8\}, f, g]$ mit

	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	5	4	1	3	8	5	8	7	f
1	5	3	3	6	8	4	3	8	
0	0	0	1	0	0	0	0	1	g
1	0	1	1	1	1	1	0	1	

Zustandskodierung:

1	100
2	101
3	000
4	111
5	010
6	110
7	011
8	001

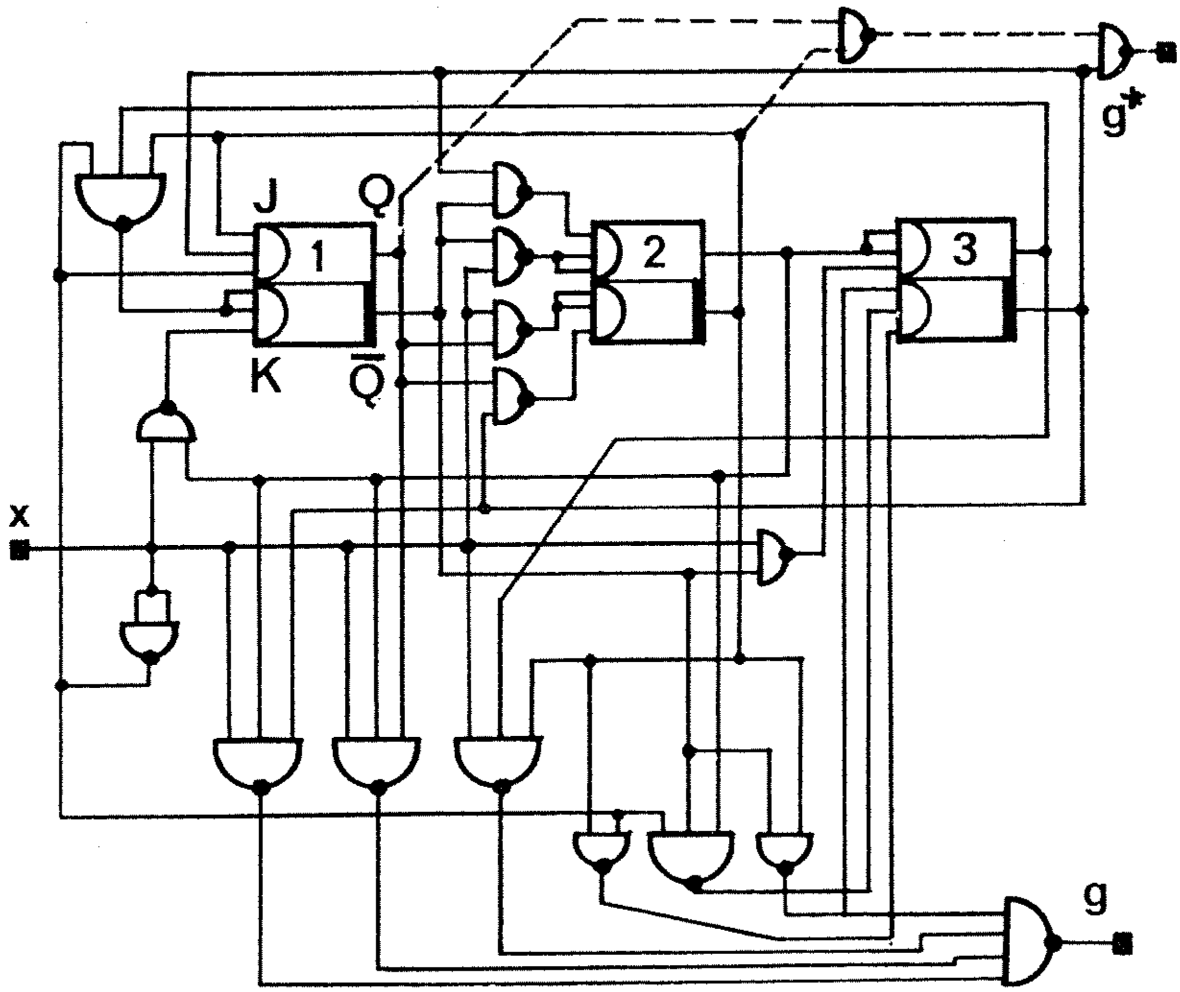

Bild 1: Schaltungsbeispiel Automat A

$$\Phi_Y = [(1,2,4-7/3,8),(1,7/2-6,8)]$$
$$M(0) = [(1,6/5,7),(2,3,7/5,8)]$$
$$\Phi_Y \cdot M(0) = [(1,6/5,7),(2,3/5,8)] = \text{Zustandsverschmelzungen}$$

$$\Phi = [(2,4,6,7/1,2,4,7/1,2,4,5/2,4-6/3,8),\ (1,7/3,4,6,8/3-6/2,4,6,8/2,4-6)]$$

$$m(\Phi) = (3,4,6,8/3,4,5,8/1,7)$$
$$A^2(\Phi) = [(4,6/3,8/4,5/1,7),(3,4,6,8/3,4,5/1,7)]$$
$$m(A^2(\Phi)) = (1,7/3,5/3,4,6,8/5,8)$$
$$A^3(\Phi) = [(1,7/4,6/3,8),(1,7/3,5/3,4,6,8)]$$
$$m(A^3(\Phi)) = m(A^2(\Phi)) \longrightarrow A(\Phi) = A^3(\Phi)$$

$$H(\Phi) = (2,4,6,7/1,2,4,7/1,2,4,5/2,4-6/3,4,6,8/3-6/2,4,6,8)$$
$$M(H(\Phi)) = [(2,3,8/1-3,6/2,4,5,7/1,2,4,6),(1-4,6,7/2-8)]$$
$$T^2(\Phi) = [(2,4,7/2,4,6/1,2,4/2,4,5/3,8),\ (1,7/3,4,6,8/3-6/2,4,6,8/2,4-6)]$$

Es fallen also nur terminale Knoten für $x = 0$ heraus.

$$H(T^2(\Phi)) = (2,4,7/2,4,6,8/1,2,4/1,7/3,4,6,8/3-6/2,4-6)$$
$$M(H(T^2(\Phi))) = [(2,3,8/2,4,5,7/1,2,4,6),(2-8/1-4,6,7)]$$
$$T^3(\Phi) = T^2(\Phi) = T(\Phi) .$$

$$\Psi = A(\Phi)\cdot T(\Phi) = [(4,6/3,8),(1,7/3,5/3,4,6,8)]$$

Wir wählen hier:

$$\Psi' = [(4,6),(1,7/3,5/3,6/4,8)]$$
$$A(\Psi') = 0 .$$
$$\equiv(\Psi) \setminus \equiv(\Psi') = \{[[3,0],[8,0]],\ [[3,1],[8,1]],\ [[4,1],[6,1]],\ [[6,1],[8,1]],\ [[3,1],[4,1]]\}$$

<u>Zu trennende Paare:</u>

Zyklen:
$$\begin{array}{c|c} [3,-] & -000 \\ \hline [8,-] & -001 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} [4,1] & 1111 \\ \hline [6,1] & 1110 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} [6,1] & 1110 \\ \hline [8,1] & 1001 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} [3,1] & 1000 \\ \hline [4,1] & 1111 \end{array}$$

Verschmelzungen:
$$\begin{array}{c|c} [1,0] & 0100 \\ \hline [6,1] & 0110 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} [5,0] & 0010 \\ \hline [7,0] & 0011 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} [2,1] & 1101 \\ \hline [3,1] & 1000 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} [5,1] & 1010 \\ \hline [8,1] & 1001 \end{array}$$

Die folgende, bereits minimierte Funktion leistet als zusätzliche Ausgangsfunktion das Verlangte:

$$\underline{\underline{g^{*} = z_3 \vee z_1 \cdot \overline{z_2}}} \quad .$$

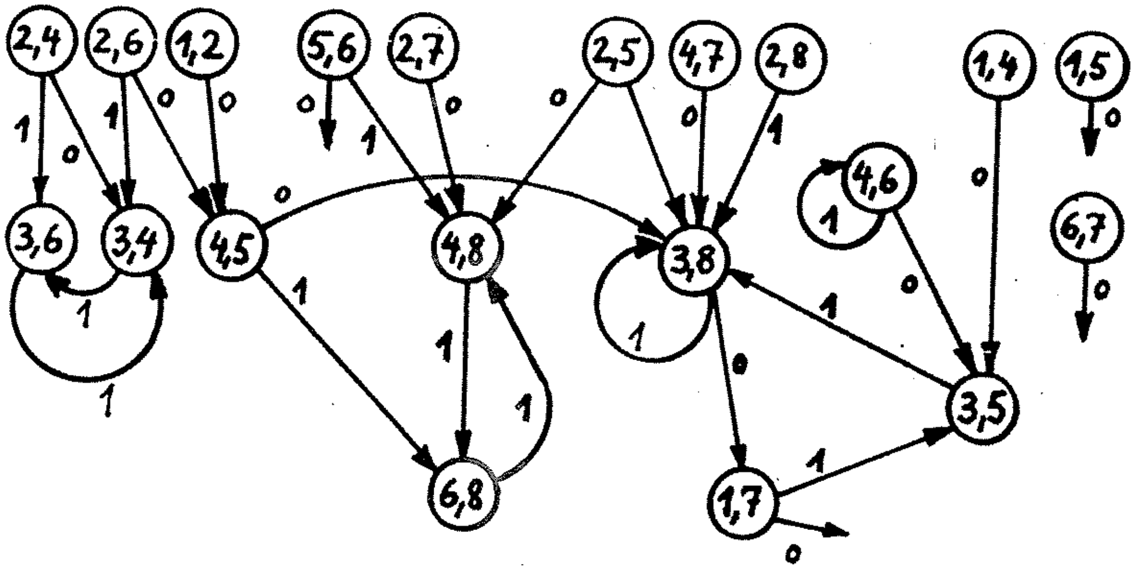

Bild 2: Testgraph von A

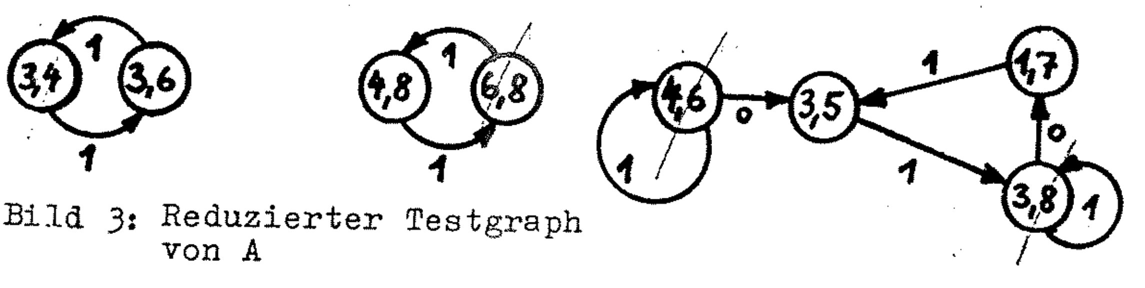

Bild 3: Reduzierter Testgraph von A

Literatur:

/1/ Kohavi,Z. u. Lavallee,P.: Design of sequential machines with fault detection capabilities. IEEE Trans. Comp. C-16(1967)Aug., 473-484

/2/ Hartmanis,J. u. Stearns, R.E.: Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965

/3/ Zech, K.-A.: Zum Auffinden von Feedbackpartitionen für endliche Automaten. EIK 1o(1974)8/9,489-494

/4/ Zech, K.-A.: Zum Entwurf prüfgünstiger Automaten nach Kohavi und Lavallee. Eingereicht zur Veröffentlichung in EIK