Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik
EIK 10 (1974) 8/9, 489–494

Zum Auffinden von Feedbackpartitionen für endliche Automaten

Von KARL-ADOLF ZECH

0. Einleitung

Die vorliegende Note beschreibt eine Methode, für endliche Automaten Feedbackpartitionen bzw. Feedbacküberdeckungen zu bestimmen.

Der auf der Grundlage des Ausschließens „geschlossener Mengensequenzen" in DABADGHAO [2] ermittelte Algorithmus ist für eine rechentechnische Implementierung nicht geeignet. Bei Verwendung der in [3] eingeführten Divisionsoperation für distributive Verbände kann jedoch eine maximale Feedbackpartition oder -überdeckung ohne großen Aufwand ermittelt werden.

Es bezeichne $A = [X, Z, f]$ einen endlichen *Halbautomaten*. Dabei ist Z die Menge der Zustände, X die der Eingangssignale und f eine Funktion von $Z \times X$ in Z. Die Mengen X und Z sind endlich und nicht leer. Eine *Überdeckung* von Z ist eine Menge π von nichtleeren Teilmengen (Blöcken) von Z mit $\bigcup \pi = Z$ derart, daß aus $B, B' \in \pi$ und $B \subseteqq B'$ folgt: $B = B'$. Eine Zerlegung oder *Partition* π von Z ist eine Überdeckung, bei der alle Blöcke paarweise durchschnittsfremd sind. Das *Produkt* $\pi \cdot \tau$ zweier Überdeckungen/Partitionen π und τ ist definiert durch $\max(\{B \cap B' \mid B \in \pi \wedge B' \in \tau\})$, wobei durch den Operator max alle Blöcke gestrichen werden, die in einem anderen enthalten sind. (Bei Partitionen genügt offenbar die Bedingung, daß die leeren Schnitte eliminiert sind.) Zwei Überdeckungen/Partitionen π und τ stehen in der Relation $\leqq$ (*kleiner gleich, feiner gleich*, $\pi \leqq \tau$) zueinander, wenn für jeden Block B aus π ein Block B' aus τ existiert mit $B \subseteqq B'$. Die Menge aller Überdeckungen einer Menge Z bildet mit $\leqq$ einen i. allg. nicht-komplementären, distributiven *Verband*, die der Partitionen ist dagegen ein (i. allg. nicht-distributiver) relativ-komplementärer Verband. Für zwei Überdeckungen/Partitionen π und τ gilt $\pi \cdot \tau = \inf(\pi, \tau)$. Das größte Element der beiden Verbände ist jeweils $1 = \{Z\}$, das kleinste die Zerlegung 0 in Einermengen. $[\pi, \tau]$ heißt *Partitions- (Überdeckungs-)paar* für A, wenn es für alle B aus π und x aus X ein B' aus τ gibt mit $f(B, x) \subseteqq B'$. Das kleinste τ mit dieser Eigenschaft existiert und heißt $m(\pi)$, das größte derartige π für τ heißt $M(\tau)$. Die Operatoren m und M sind monoton. Sei n die Zahl der Zustände von A. Dann gilt $M(0) \leqq M^2(0) =_{\mathrm{Df}} M(M(0)) \leqq \cdots$ $\cdots \leqq M(M^{n-2}(0)) = M^{n-1}(0)$. Für jede Partition oder Überdeckung π ist ferner $m(M(\pi)) \leqq \pi$. Man beachte, daß der m-Operator für Partitionen π von demjenigen für Überdeckungen verschieden ist, wobei $m(\pi)$ im Verband der Partitionen größer sein kann als im Verband der Überdeckungen.

Für beliebige Überdeckungen bzw. Partitionen π wird der Operator A^i für $i \geqq 1$ rekursiv folgendermaßen definiert (vgl. [1]):

$$A^1(\pi) = \pi ,$$
$$A^{i+1}(\pi) = \pi \cdot m(A^i(\pi)) .$$

Dabei ist stets $A^{i+1}(\pi) \leqq A^i(\pi)$.

π heißt *Feedbackpartition* (*FP*) bzw. *-überdeckung* (*FÜ*) für A, wenn $A^n(\pi) = 0$ ist. Im Verband der Überdeckungen kann $A^n(\pi)$ für die Partition π Null sein (π ist FÜ), während im Verband der Partitionen $A^n(\pi) \neq 0$ (π ist *keine* FP) gilt.

Feedbackpartitionen bzw. -überdeckungen eignen sich zur Bestimmung von *Zustandskodes* für endliche Automaten [1, 3, 4].

Unter dem *Quotienten* $\frac{\pi}{\tau}$ zweier Überdeckungen ist die Summe (Supremum) aller der Überdeckungen ϱ zu verstehen, für die $\varrho \cdot \tau \leqq \pi$ ist. Für beliebige Überdeckungen gelten folgende Aussagen (vgl.[3]):

1. $\frac{\pi}{\tau} \geqq \pi$;

2. $\frac{\pi}{\tau} \cdot \tau = \pi \cdot \tau \leqq \pi \leqq \frac{\pi \cdot \tau}{\tau}$;

3. *Wenn* $\tau_1 \leqq \tau_2$, *so* $\frac{\pi}{\tau_1} \geqq \frac{\pi}{\tau_2}$;

4. *Wenn* $\tau \leqq \pi$, *so* $\frac{\pi}{\tau} = 1$.

1. Ermittlung von Feedbacküberdeckungen

Wir definieren für eine beliebige Überdeckung τ rekursiv

$$C^1(\tau) = M^n(0) ,$$
$$C^{i+1}(\tau) = M\left(\frac{C^i(\tau)}{\tau \cdot m(\tau)}\right).$$

1.1. Satz. *Für $i \geqq 1$ und alle τ ist $C^{i+1}(\tau) \geqq C^i(\tau)$.* ▮

1.2. Satz. *Wenn $C^i(\tau) = C^{i+1}(\tau)$, so $C^i(\tau) = C^{i+j}(\tau)$ für alle $j \geqq 0$.* ▮

1.3. Satz. *Für jede Überdeckung τ und $k \geqq 1$ ist $\pi =_{\mathrm{Df}} \tau \cdot C^k(\tau)$ eine FÜ.*

Beweis. Wir zeigen zunächst $A^i(\pi) \leqq C^{k-i+1}(\tau)$ für $i \geqq 1$ induktiv wie folgt.

1. $A^1(\pi) = \pi = \tau \cdot C^k(\tau) \leqq C^k(\tau)$;

2. Sei $A^j(\pi) \leqq C^{k-j+1}(\tau)$ für $j \geqq 1$ gültig. Wegen $m(\tau) \geqq m(A^1(\pi)) \geqq m(A^j(\pi))$ ist $m(A^j(\pi)) = m(A^j(\pi)) \cdot m(\tau)$.

Demzufolge gilt:

$$\begin{aligned} A^{j+1}(\pi) &= \pi \cdot m(A^j(\pi)) = \tau \cdot C^k(\tau) \cdot m(\tau) \cdot m(A^j(\pi)) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\leqq \tau \cdot C^k(\tau) \cdot m(\tau) \cdot m(C^{k-j+1}(\tau)) \\ &\leqq \tau \cdot m(\tau) \cdot C^k(\tau) \frac{C^{k-j}(\tau)}{\tau \cdot m(\tau)} \leqq C^k(\tau) \cdot C^{k-j}(\tau) = C^{k-j}(\tau) . \end{aligned}$$

Aus der eben bewiesenen Behauptung folgt $A^k(\pi) \leq M^n(0)$, also ist $A^{k+n}(\pi) = A^n(\pi) = 0$, was zu zeigen war. ▮

1.4. Satz. *Sei π eine FÜ und k so gewählt, daß $m(A^k(\pi)) = 0$. Dann ist $C^{k+1}(\pi) = 1$.*

Beweis. Wir zeigen $A^{k-i+1}(\pi) \leq C^i(\pi)$ durch Induktion über i.

1. Für $i = 1$ gilt wegen $A^k(\pi) \leq M^n(0)$ die Behauptung.

2. Sei die Behauptung für $i = l$ gültig. Dann ist $A^{k-l+1}(\pi) = \pi \cdot m(A^{k-l}(\pi))$, also $m(A^{k-l}(\pi)) \leq \frac{A^{k-l+1}(\pi)}{\pi}$ und $A^{k-l}(\pi) \leq M\left(\frac{A^{k-l+1}(\pi)}{\pi}\right) \leq M\left(\frac{A^{k-l+1}(\pi)}{\pi \cdot m(\pi)}\right) \leq$

$\leq M\left(\frac{C^l(\pi)}{\pi \cdot m(\pi)}\right) = C^{l+1}(\pi)$.

Für $i = k$ ergibt sich $\pi \leq C^k(\pi)$ und somit $C^{k+1}(\pi) = M(1) = 1$. ▮

1.3 und 1.4 besagen, daß eine Überdeckung π *genau dann* FÜ ist, wenn für eine Überdeckung τ und ein $k \geq 1$ gilt: $\pi = \tau \cdot C^k(\tau)$.

2. Ermittlung von Feedbackpartitionen

Für Partitionen τ definieren wir rekursiv

$$P^1(\tau) = \{M^n(0)\},$$

$$P^{i+1}(\tau) = \max\left(\left\{M(\varrho) \mid \varrho \leq \frac{\alpha}{\tau \cdot m(\tau)} \text{ ist Partition für ein } \alpha \text{ aus } P^i(\tau)\right\}\right).$$

2.1. Satz. *Für $i \geq 1$ und beliebige Partitionen τ gibt es für jedes σ aus $P^i(\tau)$ ein σ' aus $P^{i+1}(\tau)$ mit $\sigma \leq \sigma'$.* ▮

2.2. Satz. *Wenn $P^i(\tau) = P^{i+1}(\tau)$, so $P^i(\tau) = P^{i+j}(\tau)$ für alle $j \geq 0$.* ▮

2.3. Satz. *Für $k \geq 1$, jede Partition τ und jedes σ aus $P^k(\tau)$ ist $\tau \cdot \sigma$ eine Feedbackpartition.*

Beweis analog zu 1.3. ▮

2.4. Satz. *Sei π FP und k so gewählt, daß $m(A^k(\pi)) = 0$. Dann gibt es ein σ_k aus $P^k(\pi)$ mit $\pi \leq \sigma_k$.*

Beweis. Wir zeigen ähnlich wie in 1.4 die Beziehung $A^{k-i+1}(\pi) \leq \sigma_i$ für ein σ_i aus $P^i(\pi)$ und alle $i \geq 1$.

1. Für $i = 1$ ergibt sich $A^k(\pi) \leq \sigma_1 = M^n(0) \in P^1(\pi)$;

2. Sei die Behauptung für $i = l$ gültig. — Wegen $A^{k-l+1}(\pi) = \pi \cdot m(A^{k-l}(\pi))$ und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$m(A^{k-l}(\pi)) \leq \frac{A^{k-l+1}(\pi)}{\pi \cdot m(\pi)} \leq \frac{\sigma_l}{\pi \cdot m(\pi)}$$

für ein σ_l aus $P^l(\pi)$. Es gibt eine maximale Partition $\varrho \leq \frac{\sigma_l}{\pi \cdot m(\pi)}$, so daß $\sigma_{l+1} =_{\mathrm{Df}} M(\varrho)$ die Behauptung erfüllt. ▮

2.3 und 2.4 bedeuten analog zu 1.3 und 1.4, daß π *genau dann* FP ist, wenn $\pi = \tau \cdot \sigma$ für eine Partition τ und für ein σ aus $P^k(\tau)$ ($k \geq 1$) ist. Zur Ermittlung von FP's, die größer als eine FP π sind, brauchen die Ausdrücke $P^n(\varrho)$ nur für solche ϱ untersucht zu werden, die Vergröberungen von τ sind.

3. Beispiel

Wir betrachten den Automaten $A = [X, Z, f]$ aus Hartmanis/Stearns [1], S. 152 (vgl. Dabadghao [2]) mit

x \ z	0	1	2	3	4	5	6	7
00	0	6	7	7	7	5	1	5
01	5	1	6	6	0	2	2	2
11	7	7	1	5	1	3	3	3
10	2	2	4	4	4	6	6	0

$f(z, x)$

Wir setzen $\tau_1 = (0—2 \,/\, 3—7)$. Es ist $m(\tau_1) = 1$ im Verband der Partitionen und $M(0) = M^n(0) = 0$.

$$\frac{0}{\tau_1} = (0{,}3 \,/\, 0{,}4 \,/\, 0{,}5 \,/\, 0{,}6 \,/\, 0{,}7 \,/\, 1{,}3 \,/\, 1{,}4 \,/\, 1{,}5 \,/\, 1{,}6 \,/\, 1{,}7 \,/\, 2{,}3 \,/$$
$$/\, 2{,}4 \,/\, 2{,}5 \,/\, 2{,}6 \,/\, 2{,}7);$$

$$\varrho_1 =_{\mathrm{Df}} (0{,}6 \,/\, 1{,}5 \,/\, 2 \,/\, 3 \,/\, 4 \,/\, 7) \leqq \frac{0}{\tau_1}.$$

Demzufolge: $\sigma_1 =_{\mathrm{Df}} M(\varrho_1) = (0{,}1 \,/\, 2{,}4 \,/\, 5—7) \in P^2(\tau_1)$;

$$\frac{\sigma_1}{\tau_1} = (0,\, 1,\, 5—7 \,/\, 0,\, 1,\, 3,\, 4 \,/\, 2—4);$$

$$\varrho_2 =_{\mathrm{Df}} (0,\, 1,\, 5—7 \,/\, 2—4); \quad \sigma_2 =_{\mathrm{Df}} M(\varrho_2) = (0—4 \,/\, 5—7) \in P^3(\tau_1)\,,$$

wobei

$$\frac{\sigma_2}{\tau_2} = (0—4 \,/\, 0—2,\, 5—7); \text{ und mit } \varrho_3 =_{\mathrm{Df}} \varrho_2 \text{ ist } \sigma_3 = \sigma_2;$$

also ist $\quad \pi_1 = \tau_1 \cdot \sigma_2 = (0—2 \,/\, 3,\, 4 \,/\, 5—7)$ FP.

Um eine evtl. größere FP zu finden, wird π_1 vergröbert zu

$$\tau_2 = (0—4 \,/\, 5—7)\,.$$

Es ist

$$\sigma_2' = (0,\, 1 \,/\, 2—4 \,/\, 5,\, 7 \,/\, 6) \in P^2(\tau_2);$$

$$\frac{\sigma_2'}{\tau_2} = (0,\, 1,\, 5,\, 7 \,/\, 0,\, 1,\, 6 \,/\, 2—7);$$

$$\varrho_3 =_{\mathrm{Df}} (0{,}6 \,/\, 1{,}5 \,/\, 2—4,\, 7) \leqq \frac{\sigma_2'}{\tau_2};$$

$$\sigma_3' = (0,\, 1 \,/\, 2—4 \,/\, 5—7) \in P^3(\tau_2);$$

$$\frac{\sigma_3'}{\tau_2} = (0,\, 1,\, 3—7 \,/\, 1—7); \quad \sigma_4' = (0—4 \,/\, 5—7) \in P^4(\tau_2); \quad \frac{\sigma_4'}{\tau_2} = 1\,,$$

also ist

$$\pi_2 = \tau_2 \text{ FP}\,.$$

4. Diskussion

Es wird gezeigt, wie man sehr schnell mit Hilfe der Divisionsoperation und des M-Operators Feedbackpartitionen bzw. -überdeckungen ermittelt. Aufwendiger ist natürlich die Erzeugung *aller* maximalen FP's bzw. FÜ's. Bei der Algorithmierung dieses Problems geht man zweckmäßigerweise von allen Partitionen aus, die außer Blöcken mit nur einem Zustand genau einen Block besitzen, der zwei Elemente umfaßt. Es ist leicht festzustellen, welche von ihnen keine FP's bzw. FÜ's sind. Diese werden gestrichen, während $M^n(0)$ hinzugefügt wird. Anschließend betrachtet man alle Vergröberungen, die dadurch entstehen, daß jeweils zwei Blöcke vereinigt werden. Bei Überdeckungen sind darüberhinaus noch solche, die sich durch einfaches Vergrößern einzelner Blöcke ergeben, hinzuzufügen. Vergröberungen τ, für die es eine bereits gefundene FP bzw. FÜ π mit $\pi \geqq \tau$ gibt, sind zu streichen. Mit Hilfe des Operators C^n bzw. P^n werden gemäß 1.3 bzw. 2.3 ausgehend von den Vergröberungen FÜ's bzw. FP's gebildet. Ist das Ergebnis größer als die FP's bzw. FÜ's, von deren Vergröberung ausgegangen wurde, so sind von den noch nicht bearbeiteten Vergröberungen diejenigen zu streichen, die π majorisiert. π wird gestrichen, wenn das nicht der Fall ist oder wenn $\pi \leqq M^n(0)$. Nach Abbruch des Algorithmus liegen alle maximalen FP's bzw. FÜ's vor.

Betrachtet man die Beweise von 1.3 und 2.3, so erkennt man, daß in den Definitionen von C^{i+1} und P^{i+1} als Nenner statt $\tau \cdot m(\tau)$ auch $\tau \cdot m(A^{n+1-i}(\tau))$ stehen könnte, ohne daß sich die angegebenen Aussagen ändern. Jedoch ist das einerseits verbunden mit dem zusätzlichen Aufwand, $A^j(\tau)$ für alle $j = 1, \ldots, n$ zu berechnen, aber andererseits mit dem Vorteil, daß die Ergebnisse i. allg. größer sind als die nach Abschnitt 1 oder 2 ermittelten.

Es existiert kein Kriterium dafür, wie die „Güte“ einer FP bzw. FÜ bezüglich der durch sie festlegbaren Zustandskodes [3] ohne deren Berechnung einzuschätzen ist. Daher wird man sich in der Regel damit begnügen, nur einige (evtl. maximale) Elemente des gesamten Baumes der FP's bzw. der FÜ's zu ermitteln.

Literatur

[1] Hartmanis, J., Stearns, R. E., Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.

[2] Dabadghao, S. V., A Method for Finding Feedback Partitions for Sequential Machines. IEEE Trans. Comp. **C-18** (1969) 5, 465–467.

[3] Zech, K.-A., Feedback-orientierte Kodierung endlicher Automaten. EIK **9** (1973) 10, 635–650.

[4] Zech, K.-A., Abstrakte Automaten, algebraische Feedbacktheorie und Entwurf digitaler Folgeschaltungen. Nachrichtentechnik/Elektronik (erscheint demnächst).

[5] Скорняков Л. А., Элементы теории структур. Изд. Наука, Москва 1970.

Kurzfassung

Feedbackpartitionen und Feedbacküberdeckungen eignen sich zur Bestimmung aufwandsgünstiger Zustandskodes für endliche Automaten [3]. Auf der Grundlage einer in distributiven Verbänden definierbaren Divisionsoperation für Überdeckungen wird eine Möglichkeit vorgestellt, Feedbackpartitionen bzw. -überdeckungen zu ermitteln.

Abstract

Feedback partitions and feedback covers can be used for generating economical state assignments for finite sequential automata [3]. A method is suggested for finding feedback partitions or covers, respectively, which is based on cover division definable in distributive lattices.

Резюме

Разбиения и покрытия обратной связи можно применить для кодирования внутренных состояний конечных последовательных автоматах [3].

Предлагается метод нахождения разбиений и покрытий обратной связи, который основывается на делений покрытий, всегда определенных в дистрибутивных структурах.

(Eingegangen am 23. 4. 1974)

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. K.-A. Zech
1058 Berlin
Schliemannstr. 28
DDR