Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik
EIK 7 (1971) 8, 505–512

Eine Bemerkung über stochastische Wahrheitsfunktionen und ihre Anwendung in der Strukturtheorie stochastischer Automaten

Von KARL-ADOLF ZECH[1])

0. Einleitung

Die vorliegende Note untersucht in Verallgemeinerung der Theorie der Booleschen Funktionen und logischen Netze die Möglichkeit, endliche stochastische Automaten durch „wahrscheinlichkeits"-logische Netze zu realisieren, d. h. durch Netze, deren (logische) Bauelemente in ihrer Funktionsweise wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesetzmäßigkeiten unterliegen. Es wird ein vollständiges System für die als Verallgemeinerung der Booleschen Funktionen zu verstehenden „stochastischen Wahrheitsfunktionen" angegeben und gezeigt, daß es für jeden endlichen stochastischen Automaten eine Boolesche Kodierung seiner Eingabe- und Ausgabesignale und Zustände gibt, für die man ein System unabhängig arbeitender wahrscheinlichkeitslogischer Netze angeben kann, das den Automaten imitiert.

Ich danke der Forschungsgruppe „Grundlagen diskreter Systeme" im Bereich Kybernetik/Rechentechnik der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin für die Anregungen, die mir bei der Diskussion der angesprochenen Problematik zuteil wurden.

1. Stochastische Wahrheitsfunktionen

Eine n-stellige Boolesche Wahrheitsfunktion f ist eine eindeutige Abbildung, die jedem n-Tupel von Nullen und Einsen entweder eine Null oder eine Eins zuordnet — oder, wahrscheinlichkeitstheoretisch formuliert, f ist eine Abbildung von $\{0, 1\}^n$ in die Menge der determinierten Wahrscheinlichkeitsmaße über $\{0, 1\}$.

Allgemeiner wollen wir nun den Begriff der stochastischen Wahrheitsfunktion definieren. Wir vereinbaren zunächst folgende Schreibweise. Es sei x eine reelle Zahl aus dem abgeschlossenen Intervall $\langle 0, 1\rangle$ und e aus $\{0, 1\}$. Dann ist

$$x^e =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} x, & \text{falls } e = 1\,, \\ 1 - x\,, & \text{falls } e = 0\,. \end{cases}$$

Ist für $1 \leqq \nu \leqq n$ x_ν die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an der ν-ten Stelle des n-stelligen Booleschen Vektors $[e_1, \ldots, e_n]$ eine Eins steht, so gibt $\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{e_\nu}$

[1]) Institut für Nachrichtentechnik Berlin, Rechenzentrum, Arbeitsgruppe rechnergestützter Schaltungsentwurf (Direktor: Dr.-Ing. D. LOCHMANN).

die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß $[e_1, \ldots, e_n] = [\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ ist, wenn die Komponenten voneinander unabhängig sind.

Definition 1 (vgl. Ádám [1]). Eine Funktion f von $\langle 0, 1\rangle^n$ in die Menge der diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße über $\{0, 1\}$ heißt *stochastische Wahrheitsfunktion* (kurz: *SWF*), wenn sie für alle $[x_1, \ldots, x_n] \in \langle 0, 1\rangle^n$ der folgenden Bedingung genügt:

$$f[x_1, \ldots, x_n](1) = \sum_{[e_1, \ldots, e_n] \in \{0,1\}^n} \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{e_\nu} f[e_1, \ldots, e_n](1). \text{ [1]}$$

Die ν-te Stelle des Argumentvektors wird also als die Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert, daß an dieser Stelle eine Eins steht. Daher ist f bereits durch die Werte für die determinierten Argumente vollständig bestimmt. Wir schreiben vereinfachend $f(x_1, \ldots, x_n)$ anstatt $f[x_1, \ldots, x_n](1)$ und betrachten f als eindeutige Abbildung von $\langle 0, 1\rangle^n$ in $\langle 0, 1\rangle$.

Definition 2. Eine Menge $\mathfrak{M}$ stochastischer Wahrheitsfunktionen heißt in der Menge der SWF *funktional vollständig*, wenn jede SWF aus Funktionen aus $\mathfrak{M}$ unter Verwendung der folgenden Regeln erzeugt werden kann:

1. *Substitution* (an der i-ten Stelle). Gegeben seien die SWF f (n-stellig) und g (m-stellig). Man bildet eine neue, $(n + m - 1)$-stellige SWF h durch die Festsetzung

$$h(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) =_{\mathrm{Df}} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \ldots, x_{n+m-1}).$$

2. *Transposition von Argumenten*. Gegeben sei die n-stellige SWF f. Man bildet eine neue n-stellige SWF g durch die Festlegung

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) =_{\mathrm{Df}} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n).$$

3. *Gleichsetzen von Argumenten*. Es sei f eine $(n + 1)$-stellige SWF. Man bildet eine neue n-stellige SWF g durch die Vorschrift

$$g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =_{\mathrm{Df}}$$
$$x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n, 1) + (1 - x_i) f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, 0).$$

Diese Festlegung muß so getroffen werden, damit g wieder der Definition 1 genügt. Denn das Gleichsetzen von Argumenten bedeutet zunächst, daß die Gleichungen

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n, 1),$$
$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, 0)$$

erfüllt sind. Wegen Definition 1 ist ferner

$$g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =$$
$$= x_i\, g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) + (1 - x_i)\, g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Formulierung.

[1] Diese Definition ist etwas allgemeiner als bei Ádám [1], da sie auch für Argumente aus $\langle 0, 1\rangle^n$ erklärt ist. Dadurch ist es möglich, die unter Definition 2 angegebenen Regeln unmittelbar anzuwenden.

4. *Hinzunahme von fiktiven Variablen.* Gegeben sei eine n-stellige SWF f. Man bildet eine neue $(n+1)$-stellige SWF g durch die Festsetzung

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) =_{\mathrm{Df}} f(x_1, \ldots, x_n) .$$

Wir geben nun einige spezielle SWF an und zeigen, daß die Menge dieser Funktionen funktional vollständig ist.

Definition 3. Es seien E und τ reelle Zahlen mit $E \in (0, 1\rangle$ und $\tau \in \langle 0, 1 - E) \cup \{0\}$. Wir definieren

1. die *Negation*

$$\mathrm{NON}\,(x) =_{\mathrm{Df}} 1 - x;$$

2. die *stochastische Konjunktion*

$$\mathrm{ET}\,[E]\,(x, y) =_{\mathrm{Df}} E \cdot x \cdot y$$

(E heißt das *Gewicht* der Konjunktion. Für $E = 1$ ergibt sich die (determinierte) *et*-Funktion. Ein funktionales Element, das eine ET-Funktion realisiert, kann also höchstens dann den Wert 1 ausgeben, wenn beide Argumente den Wert 1 annehmen können. E kann etwa als „Sicherheitskoeffizient" dieser Funktion interpretiert werden);

3. die *stochastische Alternative*

$$\mathrm{VEL}\,[E, \tau]\,(x, y) =_{\mathrm{Df}} E\,[x\,(1 - y) + y\,(1 - x)] + (E + \tau)\,x\,y$$

(E heißt das *Gewicht*, τ das *Inkrement* der Alternative. E gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Funktion VEL $[E, \tau]$ den Wert 1 annimmt, wenn genau eine Variable den Wert Eins und die andere den Wert Null annimmt. Man wird im allgemeinen fordern, daß eine Alternative desto sicherer den Wert Eins annimmt, je mehr Argumentenvariable mit dem Wert Eins belegt sind. Dieser Zuwachs wird durch τ angegeben. Wie auch bei der ET-Funktion ist der Wert für das Argumentenpaar [0, 0] stets Null).

Zur Vereinfachung der Schreibweise legen wir fest:

1. $\mathrm{ET}\,[E\,E']\,(x, y, z) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{ET}\,[E]\,(x, \mathrm{ET}\,[E']\,(y, z))$
$= \mathrm{ET}\,[E]\,(\mathrm{ET}\,[E']\,(x, y), z) = E\,E'\,x\,y\,z\,.$

Entsprechend ist

$$\mathrm{ET}\,[E]\,(x_1, \ldots, x_n) = E \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i\,.$$

Diese verallgemeinerte ET-Funktion ist in allen Argumenten assoziativ und kommutativ.

2. Sind τ, τ' bzw. τ'' uninteressant, d. h. innerhalb der Beschränkung beliebig wählbar, so setzen wir

$$\mathrm{VEL}\,[E\,E']\,(u, v, w, x) =_{\mathrm{Df}}$$
$$\mathrm{VEL}\,[E, \tau]\,(\mathrm{VEL}\,[E', \tau']\,(u, v), \mathrm{VEL}\,[E', \tau'']\,(w, x))$$

bzw. allgemeiner

$$\mathrm{VEL}\,[E\,E']\,(x_1, \ldots, x_{2n}) =_{\mathrm{Df}} \mathrm{VEL}\,[E, \tau]\,(\mathrm{VEL}\,[E', \tau_1]\,(x_1, x_2), \ldots$$
$$\ldots, \mathrm{VEL}\,[E', \tau_n]\,(x_{2n-1}, x_{2n}))\,.$$

Im determinierten Fall kann jede Alternative mit Hilfe der Substitutionsregel aus der zweistelligen (elementaren) Alternative erzeugt werden, wobei die Funktion assoziativ und kommutativ in allen Argumenten ist. Im stochastischen Fall ist das im allgemeinen für $\tau > 0$ nicht möglich. Wir können daher die abkürzende Schreibweise für die verallgemeinerte VEL-Funktion nur dann verwenden, wenn die Inkremente für die Betrachtung keine Rolle spielen.

3. $\underset{i=1,\ldots,n}{\mathrm{VEL}}\,[E]\, x_i =_{\mathrm{Df}} \mathrm{VEL}\,[E]\,(x_1, \ldots, x_n)$.

Satz 1. *Das System*

$$\mathfrak{M} = \{\mathrm{NON}\} \cup \{\mathrm{ET}\,[E] \mid E \in (0, 1\rangle\} \cup \{\mathrm{VEL}\,[E, \tau] \mid E \in (0, 1\rangle \wedge \tau \in \langle 0, 1 - E) \cup \{0\}\}$$

ist in der Menge aller SWF funktional vollständig.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für determinierte Argumente zu beweisen (vgl. Definition 1). Wir zeigen, daß jede n-stellige SWF f ($n \geqq 1$) aus Funktionen aus $\mathfrak{M}$ erzeugt werden kann.

Wählen wir die Zahlen $E, E_1, \ldots, E_{2^n}$ derart, daß

$$1 \geqq E \geqq \max_{[e_1, \ldots, e_n] \in \{0, 1\}^n} f(e_1, \ldots, e_n)$$

und für $[e_1, \ldots, e_n] \in \{0, 1\}^n$ und $f(e_1, \ldots, e_n) > 0$

$$0 < E_i = \frac{f(e_1, \ldots, e_n)}{E} \leqq 1$$

ist, so gilt

$$f(e_1, \ldots, e_n) = \underset{f(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_n^i) > 0}{\mathrm{VEL}}\,[E]\,\mathrm{ET}\,[E_i]\left(e_1^{\sigma_1^i}, \ldots, e_n^{\sigma_n^i}\right).$$

Den rechten Ausdruck der letzten Gleichung wollen wir *stochastische kanonische alternative Normalform* (SKANF) nennen.

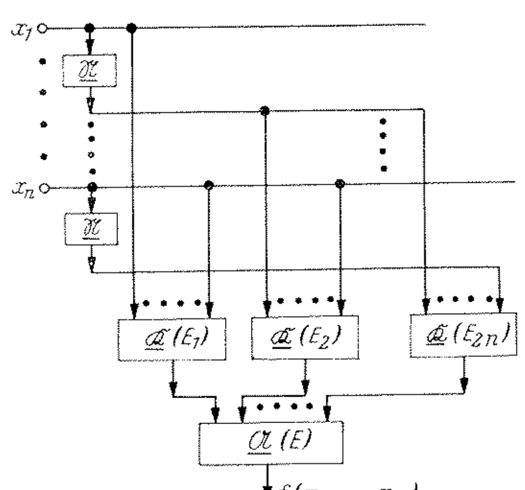

Abb. 1. Realisierung einer n-stelligen SWF durch ein wahrscheinlichkeitslogisches Netz [Korrektur: statt (E_{2n}) lies (E_{2^n})]

Die Gültigkeit dieser Beziehung ist leicht einzusehen, wenn man beachtet, daß aus ET $[E_i]\,(e_1^{\sigma_1^i}, \ldots, e_n^{\sigma_n^i}) > 0$ für alle $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ die Gleichung $e_\nu = \sigma_\nu^i$ folgt. Daher ist stets höchstens eine Komponente der verallgemeinerten VEL-Funktion größer als Null. Aufgrund der Festlegung der E_i und E nimmt der rechte Ausdruck genau dann einen positiven Wert an, wenn das auch für die linke Seite der Fall ist, und beide Werte stimmen überein.

Die SKANF ist mit Hilfe der Regeln 1—4 aus der NON-Funktion und aus elementaren ET- und VEL-Funktionen erzeugbar. Damit ist der Satz bewiesen (vgl. Abb. 1).

Definition 1 entspricht der Entwicklung von f nach den x_i für $E = 1$. Für diesen Fall ist die Behauptung des Satzes also trivial.

Beispiel. Es ist die SKANF für die folgende 2-stellige SWF anzugeben:

x	y	$f(x, y)$
0	0	0,81
1	0	0,27
0	1	0
1	1	0,45

Dann ist offenbar z. B.

$$f(e_1, e_2) = \text{VEL}\,[0{,}9]\,(\text{ET}\,[0{,}9]\,(1 - e_1, 1 - e_2)\,,\ \text{ET}\,[0{,}3]\,(e_1, 1 - e_2)\,,\ \text{ET}\,[0{,}5]\,(e_1, e_2))\,.$$

2. Wahrscheinlichkeitslogische Netze

Unter einem *wahrscheinlichkeitslogischen Elementarautomaten* $\mathfrak{E}$ verstehen wir einen stochastischen Automaten mit binärer Ausgabe, dessen Eingabesignale Boolesche Vektoren sind und der höchstens zwei Zustände besitzt. Insbesondere werden wir kombinatorische Elemente und binäre Verzögerungselemente betrachten. Ein binäres Verzögerungselement $\mathfrak{Y} = [\{0, 1\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}, \delta, \lambda]$ ist ein determinierter Automat mit $\delta(e_1, e_2) = e_2$ und $\lambda(e_1, e_2) = e_1$ [1]).

Die Begriffe wahrscheinlichkeitslogisches Netz, wahrscheinlichkeitslogische Vollständigkeit und Vollständigkeit einer Menge E von Elementarautomaten werden analog zu den entsprechenden Konzeptionen in [2], S. 83ff, 96/97, definiert und sollen hier nicht weiter erläutert werden.

Aus Satz 1 folgt die

Bemerkung 2. *Jede SWF kann durch ein Netz aus folgenden kombinatorischen Elementarautomaten realisiert werden (vgl. Abb. 1):*

1. *Negator* $\mathfrak{N} = [\{0, 1\}, \{z\}, \{0, 1\}, \lambda]$ *mit* $\lambda(z, e) = e^0\,(= 1 - e)$;
2. *Stochastisches Konjunktionselement*

$$\mathfrak{K}(E) = [\{0, 1\} \times \{0, 1\}, \{0, 1\}, \{z\}, G_E]$$

(Dabei ist E eine reelle Zahl aus $(0, 1\rangle$, *und die Ergebnisfunktion G_E ist festgelegt durch* $G_E[z, [e_1, e_2]]\,(1) = E\, e_1\, e_2$[2]);

[1]) Zur Bezeichnungsweise vgl. z. B. die Monographie Starke, P. H., Abstrakte Automaten. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

[2]) Wegen $Z = \{z\}$ kann die Überführungsfunktion weggelassen werden.

3. *Stochastisches Alternativelement*

$$\mathfrak{H}(E,\tau) = [\{0,1\}\times\{0,1\}, \{0,1\}, \{z\}, G_{E,\tau}]$$

(*Es ist* $E \in (0, 1\rangle$ *und* $\tau \in \langle 0, 1 - E) \cup \{0\}$ *und* $G_{E,\tau}[z, [e_1, e_2]](1) =$
$= E \cdot [e_1(1-e_2) + e_2(1-e_1)] + [E+\tau]\, e_1 e_2)$.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man — ähnlich wie bei determinierten diskreten Systemen — jeden endlichen stochastischen Automaten durch ein Netz aus Elementarautomaten der Formen 1—3 und Verzögerungselementen imitieren kann. Im determinierten Fall ist das für *jede* Boolesche Kodierung der Eingabe- und Ausgabesignale und Zustände dadurch möglich, daß die einzelnen Komponenten der entsprechenden Booleschen Überführungs- und Ergebnisfunktionen durch unabhängig arbeitende logische Netze realisiert werden.

Für den stochastischen Fall benötigen wir allerdings eine besondere Kodierung, die es erlaubt, daß die (stochastischen) Funktionen des stochastischen Automaten durch *unabhängig* arbeitende wahrscheinlichkeitslogische Netze realisiert werden können. Der folgende Satz garantiert, daß für jede stochastische Funktion eine derartige Boolesche Kodierung gefunden werden kann. Er beruht auf einem in [3] bewiesenen Satz über die Dekomposition stochastischer Automaten.

Satz 3. *Es seien Y und Z endliche nichtleere Mengen und f eine eindeutige Abbildung von Y in die Menge der diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße über Z. Dann gibt es Zahlen s und t, eindeutige Abbildungen ψ von $Y^* = \{0,1\}^s$ auf Y und φ von $Z^* = \{0,1\}^t$ auf Z und stochastische Wahrheitsfunktionen $f_1, \ldots, f_t$ derart, daß für alle $[e_1, \ldots, e_s] \in Y^*$ und $z \in Z$ gilt:*

$$f[\psi(e_1,\ldots,e_s)](z) = \sum_{[e_1',\ldots,e_t'] \in \varphi^{-1}(z)} \prod_{i=1}^{t} [f_i(e_1,\ldots,e_s)]^{e_i'}.$$

Die Abbildungen ψ und φ entsprechen praktisch einem Homomorphismus von einem System, das die Funktionen $f_1, \ldots, f_t$ realisiert, auf das System, das f realisiert. Abb. 2 illustriert das anhand eines (im gewissen Sinne kommutativen) Diagramms.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $Y = \{1, \ldots, m\}$ und $Z = \{1, \ldots, n\}$ ist. Wir kodieren Y durch die Menge $Y' = Z \times \{1, \ldots, k\}$, wobei die ganze Zahl k größer oder gleich $\frac{m}{n}$ gewählt wird. Die Menge $\{1, \ldots, k\}$ bezeichnen wir mit X, die eindeutige Abbildung von $Y' = Z \times X$ auf Y mit γ. Wir definieren eine neue Funktion F durch

$$F[z, x](z') =_{\mathrm{Df}} f[\gamma(z, x)](z')$$

und haben damit das Problem auf ein Dekompositionsproblem zurückgeführt, wenn wir F als Überführungsfunktion eines stochastischen Automaten mit X als Eingabesignalmenge und Z als Zustandsmenge interpretieren. Der dadurch definierte stochastische Medwedjew-Automat besitzt eine Dekomposition in bistabile Komponenten. Wird die Menge X noch durch Boolesche Vektoren kodiert, erhält man eine Kodierung der Mengen Y und Z, die mit den Überführungsfunktionen der Komponenten der Dekomposition das Verlangte leistet.

Korollar 4. *Jeder endliche stochastische* MOORE-*Automat mit determinierter Markierung (und damit jeder endliche stochastische Automat) kann durch ein wahrscheinlichkeitslogisches Netz realisiert werden (vgl. Abb.* 3*).*

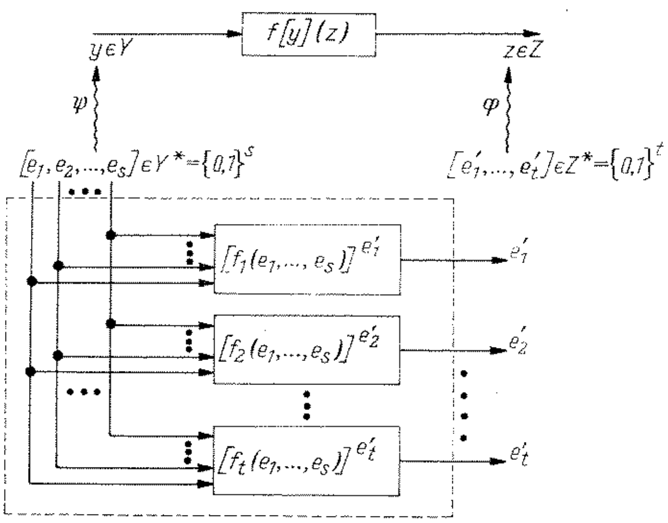

Abb. 2

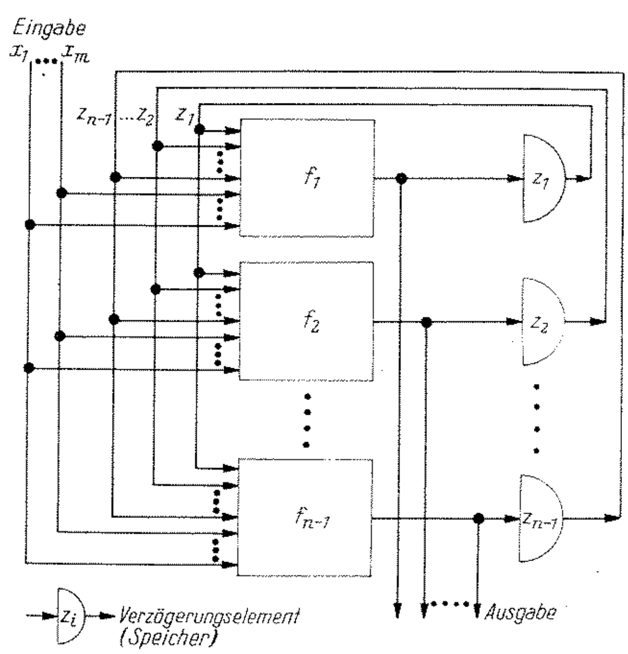

Abb. 3. Realisierung eines stochastischen MOORE-Automaten mit determinierter Markierung und n Zuständen

Beispiel. Es soll der stochastische Medwedjew-Automat $\mathfrak{C} = [\{0, 1\}, \{1, 2, 3\}, F]$ durch ein wahrscheinlichkeitslogisches Netz realisiert werden. F ist gegeben durch die folgende Tabelle:

0	1	2	3	1	1	2	3
1	0,5	0	0,5	1	0	0	1
2	0,1	0,6	0,3	2	0,2	0,7	0,1
3	0,6	0,3	0,1	3	0,9	0,1	0

$Z = \{1, 2, 3\}$ wird kodiert durch $Z^* = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, wobei die Abbildung ζ von Z^* auf Z folgendermaßen erklärt ist:

$z^* = [j, i]$	$[0, 0]$	$[0, 1]$	$[1, 0]$	$[1, 1]$
$\zeta(z^*)$	1	1	2	3

Daraus ergibt sich f_1:

$[j; x, i]$	$[0; 0, 0]$	$[1; 0, 0]$	$[0; 0, 1]$	$[1; 0, 1]$	$[0; 1, 0]$	$[1; 1, 0]$	$[0; 1, 1]$	$[1; 1, 1]$
f_1	1	1	1/3	1/4	1	1	1/8	0

und f_2:

$[i; x, j]$	$[0; 0, 0]$	$[1; 0, 0]$	$[0; 0, 1]$	$[1; 0, 1]$	$[0; 1, 0]$	$[1; 1, 0]$	$[0; 1, 1]$	$[1; 1, 1]$
f_2	0,5	0,9	0,5	0,4	1	0,8	1	0,1

Diese Funktionen werden in der bekannten Weise (vgl. voriges Beispiel) durch ein wahrscheinlichkeitslogisches Netz realisiert (s. Abb. 3).

Literatur

[1] Ádám, A., Über stochastische Wahrheitsfunktionen. In: Proc. of the Colloquium on Information Theory, Debrecen (Hungary) 1967.

[2] Kobrinski, N. E., Trachtenbrot, B. A., Einführung in die Theorie endlicher Automaten. Berlin 1967.

[3] Zech, K.-A., Homomorphe Dekomposition stochastischer und nicht-deterministischer Automaten. EIK 7 (1971) 5/6, 297–316.

Kurzfassung

Es wird ein funktional vollständiges System für die Menge der stochastischen Wahrheitsfunktionen angegeben und gezeigt, daß jeder endliche stochastische Automat durch ein wahrscheinlichkeitslogisches Netz aus stochastischen ET-, VEL- und NON-Elementen realisiert werden kann.

Abstract

In the paper is given a functional closed system for the set of the stochastic truth functions. It is shown that every finite stochastic automaton can be realized as a stochastic logical net with the stochastic elements AND, OR, and NOT.

Резюме

Даются функционально полной системе для множества стохастических логических функции и доказываются, что каждый конечный стохастический автомат может быть реализовано как стохастический логический сеть из стохастических элементов И, ИЛИ и НЕТ.

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. K.-A. Zech
1058 Berlin
Oderberger Str. 42

(Eingang: erste Fassung am 27. 4. 1970,
zweite Fassung am 21. 9. 1970)