

Bemerkungen zur Theorie stochastischer und nicht-deterministischer Nervenetze¹⁾

Von KARL-ADOLF ZECH²⁾

In den letzten drei Jahrzehnten sind eine Reihe von Versuchen unternommen worden, mit Hilfe der mathematischen Logik und der Hypothesen der modernen Psychologie und Physiologie Modelle für die Funktionen der menschlichen Geistestätigkeit technisch bzw. mathematisch zu konstruieren. Diese Versuche haben einerseits das Ziel, in gewissen Grenzen „intelligentes Verhalten“ nachzuahmen, um andererseits diesen Begriff exakter fassen zu können.

Ein grundlegender Beitrag zu diesem Thema ist eine 1943 veröffentlichte Arbeit von McCULLOCH und PITTS³⁾. Hier wird ein (abstrakter) Neuronenbegriff festgelegt, der in der diskreten Betrachtungsweise bis heute große Bedeutung besitzt. In [2] untersucht S. C. KLEENE die durch ein McCULLOCH-PITTS-Nervenetz „unterscheidbaren“ Klassen von Eingabesignalen (Reizen), d. h. die Darstellung von Ereignissen. Ansätze zur statistischen Erfassung neurophysiologischer Vorgänge kann man bei v. NEUMANN [3] finden, der die Korrekturmöglichkeit in Systemen untersucht, die aus unzuverlässigen Elementen bestehen⁴⁾.

Unter einem McCULLOCH-PITTS-Neuron verstehen wir ein System N mit zwei Zuständen, 0 und 1, zwei Ausgabesignalen, *treibenden* und *hemmenden* Knoten. Die Eingabesignale von N sind Boolesche Vektoren. N geht in den Zustand 1 über und gibt im nächsten Takt das Signal 1 aus („feuert“) genau dann, wenn mindestens $s > 0$ treibende Knoten „erregt“ sind (d. h., daß an jedem solchen Knoten das Signal 1 anliegt) und wenn kein hemmender Knoten erregt ist. Das Neuron geht in den Zustand 0 über und gibt (einen Takt später) 0 aus, falls weniger als s treibende und/oder ein hemmender Knoten erregt sind. s ist der *Schwellenwert* des Neurons.

Ein v. NEUMANN-Neuron ist ein System mit ebenfalls zwei Zuständen, 0 und 1. Es geht in den Zustand 1 über (und gibt 1 aus), falls die Differenz der Anzahl

¹⁾ Aus der Diplomarbeit an der Sektion Mathematik, Bereich mathematische Kybernetik/Rechentchnik der Humboldt-Universität zu Berlin (Direktor: Prof. Dr. H. FRANK), 1969.

²⁾ Institut für Nachrichtentechnik, Berlin-Schöneweide, Rechenzentrum, Arbeitsgruppe rechnergestützter Schaltungsentwurf (Direktor: Dr.-Ing. D. LOCHMANN).

³⁾ McCULLOCH, W. S., PITTS, W., A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bull. math. biophys. 5 (1943) 115–133.

⁴⁾ Weitere Literaturhinweise zu diesem Thema findet man u. a. in: STARKE, P. H., Einführung in die Theorie der Nervenetze. Dtsch. Z. Philosophie 13 (1965) 64–86.

der erregten treibenden Knoten und des Wertes einer (N charakterisierenden) Funktion σ an der Stelle n größer oder gleich Null ist, wenn σ eine reellwertige Funktion über der Menge der natürlichen Zahlen ist und n die Anzahl der erregten hemmenden Knoten von N bedeutet. σ heißt *Schwellenwertfunktion* von N und ist im allgemeinen monoton steigend.

Ein McCULLOCH-PITTS-Neuron ist daher ein v. NEUMANN-Neuron, wenn $\sigma(0) = s$ ist und $\sigma(x)$ für $x > 0$ größer ist als die Anzahl aller treibenden Knoten von N .

Bei realen (biologischen) Neuronen kann der Schwellenwert als durch statistische Umwelteinflüsse zeitlich veränderlich angesehen werden. Man könnte — wie es zuweilen in der Literatur geschieht — dies in einem Modell dadurch erfassen, daß man „zufällige Eingabesignale“ einführt, die hemmende und/oder treibende Knoten erregen. Wir gehen hier einen anderen Weg. In den folgenden Abschnitten sind zwei Neuronen- und Nervennetzmodelle angegeben, die stochastisch bzw. nicht-deterministisch arbeiten. Das „stochastische Neuron“ geht bei Erregung einer Mindestanzahl von treibenden Knoten nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in den aktiven Zustand über, die durch die Erregung weiterer treibender bzw. *dämpfender* Knoten vergrößert bzw. verkleinert werden kann. Sie wird als die Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert, daß der Schwellenwert des realen Neurons (das durch dieses Modell beschrieben werden soll) den Wert unterschreitet, der dem Potential der Mindestanzahl erregter treibender Knoten entspricht, die nötig sind, damit das Neuron mit einer *positiven* Wahrscheinlichkeit feuert, falls kein „hemmender“ Knoten (bzw. *dämpfender* Knoten) erregt ist. Diese Mindestanzahl nennen wir den (*abstrakten*) *Schwellenwert* des Neuronenmodells.

Entsprechendes gilt für das nicht-deterministische Neuron. Hier kennen wir lediglich die Möglichkeiten der Reaktionen, zu denen das Neuron bei einer gewissen Situation fähig ist. Das kann z. B. dadurch bedingt sein, daß zuwenig Informationen vorhanden sind, um eine statistische Voraussage machen zu können. Wir definieren zusätzlich einen „oberen Schwellenwert“, der das kleinste „Aktionspotential“ angibt, das notwendig ist, damit das Neuron mit Sicherheit in den aktiven Zustand übergeht, wenn kein hemmender Knoten erregt ist.

Die Unterscheidung von „*dämpfenden*“ (d. h. hemmenden Knoten, deren Wirkung durch eine zusätzliche Anzahl von erregten treibenden Knoten kompensiert werden kann) und „*hemmenden*“ Knoten (im Sinne von McCULLOCH und PITTS), die wir in den folgenden Abschnitten treffen werden, stellt keine eigentliche Komplizierung des Modells dar, da man einen hemmenden Knoten auffassen kann als die Zusammenfassung genügend vieler *dämpfender* Knoten.

Die Frage nach der Leistungsfähigkeit von derartigen Nervennetzen wird aufgrund der Ergebnisse von [7] beantwortet, indem gezeigt wird, daß jeder abstrakte stochastische und nicht-deterministische Automat durch ein Nervennetz imitiert werden kann. Danach existiert zu jedem sequentiellen stochastischen Operator ein binäres wahrscheinlichkeitslogisches Netz, das diesen erzeugt.

Diese Arbeit entstand innerhalb des Forschungs- und Ausbildungskollektivs „Abstrakte Automaten“ der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Bereich Kybernetik/Rechentechnik.

Ich möchte an dieser Stelle besonders Herrn Doz. Dr. habil. P. H. STARKE für seine Unterstützung und kritischen Hinweise herzlich danken.

Zur Nomenklatur und Notation verweise ich auf die Arbeiten [5]—[7].

1. Abstraktes stochastisches Neuron. Stochastisches Nervennetz

Definition 1.1. Das 4-Tupel $[a, d, h, \sigma]$ heißt *abstraktes stochastisches Neuron* (kurz: *S-Neuron*) =_{DF}

1. a, d, h sind natürliche Zahlen mit $a > 0$ und $d, h \geq 0$.
2. Bezeichnen wir mit nz die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen, so ist σ eine eindeutige Abbildung von $nz \times nz \times nz$ in das abgeschlossene Intervall $\langle 0, 1 \rangle$. Dabei ist σ in bezug auf die erste Komponente monoton steigend und in bezug auf die zweite Komponente monoton fallend.
3. Das System N besitzt a treibende, d dämpfende und h hemmende Knoten. Die geordnete Menge aller Knoten heißt *Eingabe* von N .
4. N ist eine stochastische Komponente mit zwei Zuständen (0 und 1)¹⁾. Die Menge X der Eingangssignale von N besteht aus allen Booleschen Vektoren der Länge $a + d + h$. Ist $T(t)$, $D(t)$, bzw. $H(t)$ die Anzahl der erregten treibenden, dämpfenden bzw. hemmenden Knoten von N im Takt t , $x \in X$, $z \in Z = \{0,1\}$ und F die Überföhrungsfunktion von N , so gilt:

$$F[z, x](1) = \sigma(T(t), D(t), H(t)).$$

σ heißt *Schwellenwertfunktion* von N . Die Ausgabe von N heißt *Axon*.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Spezialfalles

$$\sigma(T(t), D(t), H(t)) = \begin{cases} I [E + \tau(T(t) - s) - \delta D(t)], & \text{falls } T(t) \geq s \wedge H(t) = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wenn gilt:

$$I[x] = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 1, \\ 0, & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

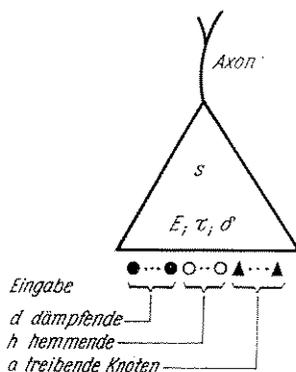


Abb. 1. Stochastisches Neuron

¹⁾ Eine stochastische Komponente ist ein stochastischer Automat $\mathcal{C} = [X, Y, Z, H]$ mit $Y = Z$ und $G[z, x](z) = 1$ für alle $z \in Z$, $x \in X$. (Vgl. [7], S. 299) Hier ist allerdings die Überföhrungsfunktion F höchstens mittelbar über das Eingangssignal x vom Zustand z abhängig.

Dabei sind τ, δ positive reelle Zahlen, s eine positive ganze Zahl und E aus $(0, 1)$. s heißt *Schwellenwert*, E *Grunderregbarkeit*, τ (*statistisches*) *Erregungsincrement* und δ (*statistisches*) *Erregungsdekrement* von N .

Wir notieren N dann durch das 7-Tupel $[a, d, h, E, s, \tau, \delta]$.

Abb. 1 zeigt die symbolische Darstellung eines abstrakten stochastischen Neurons dieser Art.

$N = [a, d, h, E, s, \tau, \delta]$ heißt *McCULLOCH-PITTS-Neuron*, falls $d = 0$ und $E = 1$ ist.

$N = [a, d, h, E, s, \tau, \delta]$ heißt *determiniertes stochastisches Neuron*, falls $E = \tau = \delta = 1$ ist.

$N = [a, d, h, \sigma]$ heißt *v. NEUMANN-Neuron*, falls $h = 0$ ist und es eine eindeutige, monotone Abbildung φ von \mathbb{N} in \mathbb{N} derart gibt, daß gilt:

$$\sigma(T(t), D(t), H(t)) = I[T(t) - \varphi(D(t)) + 1].$$

Definition 1.2. Der stochastische MEALY-Automat $\mathfrak{N} = [\mathfrak{E}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, F, G]$ mit determinierter Ergebnisfunktion heißt *stochastisches Nervennetz* (kurz: *S-Nervennetz*) \equiv_{DF}

1. $\mathfrak{E}, \mathfrak{Y}$ bzw. \mathfrak{Z} sind die Mengen aller Booleschen Vektoren der (endlichen) Länge m, l bzw. n , wobei $m, l, n > 0$ und $m + n \geq l$ ist.

2. Die *Eingabe* von \mathfrak{N} (*Rezeptor*) besteht aus m *Eingabeneuronen* (*Rezeptorneuronen*), E_1, \dots, E_m . — Ein Eingabeneuron ist eine bistabile Komponente, dessen Zustand im Takt t (im gleichen Takt) von außen eingestellt und über die Ausgabe (Axon) ausgegeben wird (vgl. Abb. 2).

3. \mathfrak{N} ist eine Verknüpfung von n stochastischen Neuronen N_1, \dots, N_n und der Eingabeneuronen E_1, \dots, E_m . N_1, \dots, N_n nennen wir die *inneren Neuronen* des Nervennetzes. Alle Neuronen von \mathfrak{N} arbeiten in der gleichen Zeitskala. Die Eingabe eines jeden inneren Neurons ist verknüpft mit dem Axon mindestens eines Eingabeneurons oder eines inneren Neurons. Dabei kann ein Axon mit Knoten mehrerer innerer Neuronen verbunden sein. Jedem Knoten entspricht genau ein Axon.

4. \mathfrak{N} erfährt einen *Reiz*, wenn die Rezeptorneuronen durch die „Umwelt“ in den Zustand 0 oder 1 versetzt werden. \mathfrak{N} erhält in jedem Takt genau einen Reiz.

5. Eine geordnete Menge von l Axonen, die von inneren oder von Eingabeneuronen ausgehen, bildet die *Ausgabe* von \mathfrak{N} .

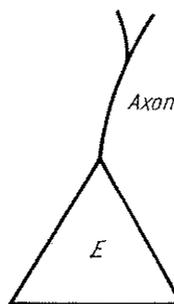


Abb. 2. Eingabeneuron

6. Das Axon eines jeden inneren Neurons ist mit der Eingabe mindestens eines anderen (inneren) Neurons verbunden oder/und gehört zur Ausgabe von \mathfrak{N} .

7. Die n -Tupel $[e_1, \dots, e_n]$ von Zuständen e_v der inneren Neuronen N_v sind die Zustände von \mathfrak{N} .

Es ist dann

$$F[[e_1, \dots, e_n], [e_1, \dots, e_m]] ([e'_1, \dots, e'_n]) = \prod_{v=1}^n P^{(v)}(e'_v | [e_1, \dots, e_n], [e_1, \dots, e_m]),$$

wenn $P^{(v)}(e|z, x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß sich das innere Neuron N_v im Takt $t + 1$ im Zustand e befindet, falls sich \mathfrak{N} im Takt t im Zustand z befand und das Eingangssignal x eingegeben wurde. — $P^{(v)}$ ist durch N_v und die Verknüpfung aller Neuronen von \mathfrak{N} festgelegt.

G ist bestimmt durch die (geordnete) Menge aller Axone, die zur Ausgabe von \mathfrak{N} gehören.

2. Die Imitation endlicher stochastischer Automaten durch stochastische Nervennetze¹⁾

Es gilt zunächst, den Begriff *Imitation* in geeigneter Weise zu definieren. Man kann dabei von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen. Die Wahl dieser oder jener Version wird davon abhängen, wie umfassend die Informationen sein sollen, die ein „imitierender“ Automat über das Verhalten des „imitierten“ liefert.

Definition 2.1. \mathfrak{C} heißt *Imitation* des stochastischen Automaten \mathfrak{C}' , wenn \mathfrak{C} homomorphes Bild eines Teilautomaten von \mathfrak{C} ist.

\mathfrak{C} heißt *schwache Imitation* von \mathfrak{C}' , wenn \mathfrak{C} Imitation eines stochastischen Automaten \mathfrak{C}'' und \mathfrak{C}' zu einem Teilautomaten von \mathfrak{C}'' äquivalent ist.

Definition 2.2. Es sei n eine nichtnegative, ganze Zahl. Das Tripel $[\xi, \zeta, \eta]$ heißt *n-Homomorphismus* von dem stochastischen Automaten $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ auf den stochastischen Automaten $\mathfrak{C}' = [X', Y', Z', H']$ genau dann, wenn gilt:

1. $[\xi, \zeta]$ ist ein $X-Z$ -Homomorphismus von dem zu \mathfrak{C} gehörenden Automaten $\tilde{\mathfrak{C}} = [X, Z, F]$ ohne Ausgabe auf den zu \mathfrak{C}' gehörenden Automaten $\tilde{\mathfrak{C}}' = [X', Z', F']$ ohne Ausgabe und

2. η ist eine eindeutige Abbildung von Y auf Y' derart, daß für alle $z \in Z$, $z' \in Z'$, $p \in W(X)$, $r \in X^n$, $q \in Y'^{(p)}$ gilt:

$$H[z, p, r] (\zeta^{-1}(z^{-1}) \times Y^n \cdot \eta^{-1}(q)) = \sum_{z'' \in Z'} H'[\zeta(z), \xi(p)] (\{z''\} \times \{q\}) \cdot F[z'', \xi(r)] (z').$$

\mathfrak{C} leistet also mit einer *Verzögerung* von n Takten das Gleiche wie sein n -homomorphes Bild \mathfrak{C}' . Offenbar ist jeder Homomorphismus ein 0-Homomorphismus und umgekehrt.

¹⁾ Ich habe Herrn Doz. Dr. habil. P. H. STARKE für einige kritische Hinweise zu danken, die zu einer wesentlich verbesserten Darstellung des Hauptsatzes führten.

Definition 2.3. Der stochastische Automat $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ heißt *n-Imitation* des Automaten $\mathfrak{C}' = [X', Y', Z', H']$, falls \mathfrak{C}' *n*-homomorphes Bild eines Teilautomaten von \mathfrak{C} ist.

Hilfssatz 1 (STARKE [5]). Zu jedem endlichen stochastischen Automaten $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ gibt es einen äquivalenten stochastischen MOORE-Automaten $\mathfrak{C}' = [X, Y, Z \times Y, F', M']$ mit determinierter Markierung und einem *Z*-Homomorphismus ζ von \mathfrak{C}' auf \mathfrak{C} .

Beweis. Wir definieren

$$F'[[z, y], x]([z', y']) =_{\text{Df}} H[z, x](y', z');$$

$$M'[[z, y]](y') =_{\text{Df}} \begin{cases} 1, & \text{falls } y' = y \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\zeta([z, y]) =_{\text{Df}} z.$$

\mathfrak{C}' ist ein stochastischer Automat und ζ ein *Z*-Homomorphismus von \mathfrak{C}' auf \mathfrak{C} . ■

Satz 2.1. Zu jeder *X-Z*-endlichen (stochastischen) Komponente $\mathfrak{C} = [X, \{0, 1\}, F]$ mit zwei Zuständen gibt es ein *S*-Nervennetz $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}) = [X', Z', F']$, das \mathfrak{C} imitiert.

Beweis. Zunächst codieren wir die Eingangssignale von \mathfrak{C} durch Boolesche Vektoren. Es sei *m* eine natürliche Zahl derart, daß mit

$$\mathfrak{C} =_{\text{Df}} \left\{ [e_1, \dots, e_m] \mid \bigwedge_{\mu=1}^m e_\mu \in \{0, 1\} \wedge \sum_{\mu=1}^m e_\mu \geq 1 \right\}$$

$Anz(\mathfrak{C}) \geq Anz(X)$ und *m* minimal ist.

Es sei ferner ξ_0 eine eindeutige Abbildung von *X* in \mathfrak{C} . Dann setzen wir

$$X^* =_{\text{Df}} \xi_0(X) = \{x_1, \dots, x_n, \dots, x_k\} \text{ und}$$

$$X' =_{\text{Df}} \mathfrak{C} \cup \underbrace{\{[0, \dots, 0]\}}_{m\text{-mal}} =_{\text{Df}} \mathfrak{C}_0.$$

Das Netz $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ besteht aus $Anz(X) = k = Anz(X^*)$ inneren *S*-Neuronen N_1, \dots, N_k und *m* Eingabeneuronen E_1, \dots, E_m . Dabei ist (für $1 \leq \kappa \leq k$) $N_\kappa =_{\text{Df}} [a^\kappa, d^\kappa, h^\kappa, s^\kappa, E^\kappa, \tau^\kappa, \delta^\kappa]$, wobei für $x =_{\text{Df}} \xi_0^{-1}(x_\kappa)$ ($x_\kappa \in X^*$) und

$\Sigma [e_1, \dots, e_m] =_{\text{Df}} \sum_{\mu=1}^m e_\mu$ gilt:

$$a^\kappa =_{\text{Df}} 2 \cdot \Sigma x_\kappa + \begin{cases} k, & \text{falls } F[1, x](1) > F[0, x](1), \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$d^\kappa =_{\text{Df}} \begin{cases} k, & \text{falls } 0 \neq F[1, x](1) < F[0, x](1), \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$h^\kappa =_{\text{Df}} m - \Sigma x_\kappa + \begin{cases} 0, & \text{falls } F[1, x](1) > 0 \vee \\ & \vee F[1, x](1) = F[0, x](1), \\ k & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$s^\kappa =_{\text{Df}} 2 \cdot \Sigma x_\kappa + \begin{cases} 0, & \text{falls } F[0, x](1) > 0, \\ 2, & \text{falls } F[1, x](1) = F[0, x](1) = 0^1, \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

¹⁾ In diesem Falle wäre das Neuron N_κ überflüssig.

$$E^x =_{\text{Df}} \begin{cases} F[0, x](1), & \text{falls } F[0, x](1) > 0, \\ F[1, x](1), & \text{falls } 0 = F[0, x](1) < F[1, x](1), \\ p \ (0 \leq p \leq 1) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\tau^x =_{\text{Df}} \begin{cases} F[1, x](1) - F[0, x](1), & \text{falls} \\ & F[1, x](1) > F[0, x](1) > 0, \\ \tau > 0 \text{ (beliebig)} & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\delta^x =_{\text{Df}} \begin{cases} F[0, x](1) - F[1, x](1), & \text{falls} \\ & 0 < F[1, x](1) < F[0, x](1), \\ \text{beliebig } (> 0) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Neuronen N_1, \dots, N_k werden untereinander wie folgt verschaltet. Es sei $x_\varkappa = [e_1, \dots, e_m]$. Für $1 \leq \varkappa, \nu \leq k$ und $1 \leq \mu \leq m$ wird das Axon von E_μ verknüpft mit

$$\begin{cases} \text{zwei treibenden Knoten von } N_\nu, & \text{falls } e_\mu = 1, \\ \text{einem hemmenden Knoten von } N_\nu & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Axon von N_ν wird verbunden mit

$$\begin{cases} \text{treibenden Knoten von } N_\nu, & \text{falls } F[1, x](1) > F[0, x](1), \\ \text{einem} \begin{cases} \text{dämpfenden Knoten von } N_\nu, & \text{falls } 0 < F[1, x](1) < F[0, x](1), \\ \text{hemmenden Knoten von } N_\nu, & \text{falls } 0 = F[1, x](1) < F[0, x](1), \end{cases} \\ \text{keinem Knoten von } N_\nu, & \text{falls } F[1, x](1) = F[0, x](1). \end{cases}$$

(Die Ausgabe von $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ besteht aus der geordneten Menge aller Axone von N_1, \dots, N_k .)

Hilfssatz 2. Es gibt einen Teilautomaten $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ von $\mathfrak{N}(\mathbb{C}) = [\mathbb{C}_0, \{[e_1, \dots, e_k] \bigwedge_{\nu=1}^k e_\nu \in \{0, 1\}\}, F']$ und einen Homomorphismus $[\xi, \zeta]$ von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ auf \mathbb{C} .

(F' ist dabei die durch die Verknüpfung der N_\varkappa definierte Überföhrungsfunktion von $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$, die wir nicht allgemein untersuchen wollen.)

Beweis. Wir setzen

$$\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}) =_{\text{Df}} [X^*, Z^*, F^*] \text{ mit}$$

$$Z^* =_{\text{Df}} \left\{ [e_1, \dots, e_k] \mid \bigwedge_{\nu=1}^k e_\nu \in \{0, 1\} \wedge \sum_{\nu=1}^k e_\nu \in \{0, 1\} \right\} \text{ und}$$

$$F^* =_{\text{Df}} F' \upharpoonright_{Z^* \times X^*} \text{ (die Einschränkung von } F' \text{ auf } Z^* \times X^* \text{).}$$

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ ein Teilautomat von $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ ist, haben wir für alle $z \in Z^*, x \in X^*$ nachzuweisen, daß gilt:

$$F^*[z, x](Z^*) = 1.$$

Wir setzen für $z \in Z^*$ und $x \in X^*$

$$\zeta(z) =_{\text{Df}} \sum z \quad \text{und} \quad \xi(x) =_{\text{Df}} \xi_0^{-1}(x).$$

Sei $P^{(*)}(e'_\nu | [e_1, \dots, e_k], x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß N_ν in den Zustand e'_ν übergeht, wenn $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ das Signal x aus X^* empfängt und sich im Zustand

$[e_1, \dots, e_k]$ befindet. Mit $\{1, \dots, \hat{\lambda}, \dots, k\} =_{\text{Def}} \{1, \dots, k\} \setminus \{\lambda\}$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{z' \in Z^*} F^*[z, x_\kappa](z') &= \\ &= \sum_{\lambda=1}^k F^*[z, x_\kappa]([0, \dots, 0, \underset{\lambda}{1}, 0, \dots, 0]) + F^*[z, x_\kappa]([0, \dots, 0]) \\ &= \sum_{\lambda=1}^k \prod_{\nu \in \{1, \dots, \hat{\lambda}, \dots, k\}} P^{(\nu)}(0|z, x_\kappa) \cdot P^{(\lambda)}(1|z, x_\kappa) + \prod_{\nu=1}^k P^{(\nu)}(0|z, x_\kappa). \end{aligned}$$

Behauptung. Es gilt die Beziehung

$$\prod_{\nu \in \{1, \dots, \hat{\lambda}, \dots, k\}} P^{(\nu)}(0|z, x_\kappa) \cdot P^{(\lambda)}(1|z, x_\kappa) = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1)$$

Beweis. Für $\nu \neq \lambda$ ist $x_\nu \neq x_\lambda$. Den Einkomponenten von x_ν sind jeweils zwei treibende Knoten von N_ν zugeordnet, wohingegen den Nullkomponenten von x_ν hemmende Knoten entsprechen. Da x_ν von x_λ verschieden ist, wird bei Eingabe von x_ν in $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ ein hemmender Knoten von N_ν erregt und/oder es werden mindestens zwei treibende Knoten weniger erregt als bei Eingabe von x_λ . (Das letztere kann auch nicht vermöge der Erregung eines weiteren treibenden Knotens von N_ν durch ein aktives Neuron von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ kompensiert werden, da $z \in Z^*$ höchstens eine Einkomponente enthält, die dem Zustand eines aktiven Neurons entspricht.) N_ν geht also mit Sicherheit in den passiven Zustand über, d. h., es ist $P^{(\nu)}(0|z, x_\kappa) = 1$.

Es gilt also zu zeigen:

$$P^{(\lambda)}(1|z, x_\kappa) = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1).$$

Wir setzen $\xi(x_\kappa) = x$ und untersuchen die möglichen Fälle:

a) $F[1, x](1) > F[0, x](1) > 0$. — N_κ feuert mit der Wahrscheinlichkeit $P^{(\kappa)}(1|z, x_\kappa) = E^\kappa$, falls $\zeta(z) = \sum z = 0$ ist. In diesem Falle sind nämlich $s^\kappa = 2 \cdot \sum x_\nu$ treibende und keine anderen Knoten erregt. Es ist $E^\kappa = F[0, x](1) = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1) = P^{(\kappa)}(1|z, x_\kappa)$. Ist andernfalls $\zeta(z) = 1$, so wird zusätzlich ein treibender Knoten erregt, und es ist

$$\begin{aligned} P^{(\kappa)}(1|z, x_\kappa) &= E^\kappa + \tau^\kappa = F[0, x](1) + (F[1, x](1) - F[0, x](1)) \\ &= F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1). \end{aligned}$$

b) $0 < F[1, x](1) < F[0, x](1)$. — Es wird kein hemmender Knoten erregt. Ist $\zeta(z) = 0$, so feuert N_κ mit der Wahrscheinlichkeit $P^{(\kappa)}(1|z, x_\kappa) = E^\kappa = F[0, x](1) = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1)$ und mit $E^\kappa - \delta^\kappa = F[0, x](1) - (F[0, x](1) - F[1, x](1)) = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1) = P^{(\kappa)}(1|z, x_\kappa)$, falls $\sum z = \zeta(z) = 1$ ist, da die Axone aller Neuronen von $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ verknüpft sind mit je einem dämpfenden Knoten von N_ν , wobei im letzten Fall genau ein Axon von ihnen erregt ist.

c) $0 \leq F[1, x](1) = F[0, x](1)$. — Wieder wird kein hemmender Knoten erregt und die Axone der inneren Neuronen von $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ sind nicht mit der Eingabe von N verknüpft. Da der Schwellenwert s^κ gleich $2 \cdot \sum x_\nu$ ist, feuert N_κ mit der Wahrscheinlichkeit $P^{(\kappa)}(1|z, x_\kappa) = E^\kappa = F[0, 1](1) = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1)$, unabhängig davon, ob $\sum z = \zeta(z)$ gleich Eins oder gleich Null ist, also unabhängig vom Zustand von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$.

d) $0 = F[0, x](1) < F[1, x](1)$. — Wie in den vorigen Fällen wird kein hemmender Knoten erregt. Es ist $s^\kappa = 2 \cdot \sum x_\nu + 1$, also geht N_κ mit Sicherheit in den Zustand 0 über, falls nicht mehr als $2 \cdot \sum x_\nu$ treibende Knoten erregt

werden, also wenn $\sum z = \zeta(z) = 0$ ist. Daher gilt: $P^\kappa(1|z, x_\kappa) = 0 = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1)$. Ist dagegen $\zeta(z) = 1$, so feuert es mit $P^\kappa(1|z, x_\kappa) = E^\kappa = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1)$, da es ein aktives Neuron in $\mathfrak{N}^*(\mathfrak{C})$ gibt, das einen weiteren treibenden Knoten erregt.

e) $0 = F[1, x](1) < F[0, x](1)$. — In diesem Fall sind die Axone aller inneren Neuronen von $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ verknüpft mit je einem hemmenden Knoten von N_κ . Ist $\zeta(z) = 1$, so ist $P^{(\nu)}(1|z, x_\kappa) = 0 = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1)$, und bei $\zeta(z) = 0$ gilt $P^{(\nu)}(1|z, x_\kappa) = E^\kappa = F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1)$.

f) $0 = F[1, x](1) = F[0, x](1)$. — Der Schwellenwert $s^\kappa = 2 \cdot \sum x_\kappa + 2$ ist immer größer als die Anzahl der erregten treibenden Knoten, so daß $P^{(\nu)}(1|z, x_\kappa)$ stets gleich Null ist.

Damit ist die Behauptung bewiesen, und es gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1) + F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](0) \\ &= \prod_{\nu \in \{1, \dots, \hat{\lambda}, \dots, k\}} P^{(\nu)}(0|z, x_\kappa) \cdot P^{(\nu)}(1|z, x_\kappa) + P^{(\nu)}(0|z, x_\kappa) \\ &= \sum_{\lambda=1}^k \prod_{\nu \in \{1, \dots, \hat{\lambda}, \dots, k\}} P_{(\nu)}(0|z, x_\kappa) \cdot P^{(\lambda)}(1|z, x_\kappa) + \prod_{\nu=1}^k P^{(\nu)}(0|z, x_\kappa) \\ &= F^*[z, x_\kappa](Z^*). \end{aligned}$$

Gleichzeitig erkennt man, daß $[\xi, \zeta]$ ein $X-Z$ -Homomorphismus von $\mathfrak{N}^*(\mathfrak{C})$ auf \mathfrak{C} ist, denn es gilt für $z \in Z^*, x \in X^*$

$$\begin{aligned} \sum_{z' \in \zeta^{-1}(1)} F^*[z, x_\kappa](z') &= F^*[z, x_\kappa]([0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]) \\ &= 1 \cdot F[\zeta(z), \xi(x_\kappa)](1). \end{aligned}$$

Hilfssatz 2 und Satz 2.1 sind damit bewiesen. ■

Satz 2.2. Zu jedem endlichen stochastischen MOORE-Automaten $\mathfrak{C} = [X, Y, Z', F', M']$ mit determinierter Markierung und mehr als einem Zustand gibt es ein S -Nervennetz $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$, das \mathfrak{C} 1-imitiert. $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ besitzt p innere Neuronen mit $p \leq \text{Anz}(X') \cdot 2^{\text{Anz}(Z')-2} \cdot (\text{Anz}(Z') - 1)$.

Beweis. Ist $\text{Anz}(Z') > 2$, so betrachten wir die nach Satz 3.2 aus [7] konstruierte Dekomposition $\mathfrak{D} = [X, Y, Z, H]$ von \mathfrak{C} . Sie bestehe aus den Komponenten $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_n$ ($\mathfrak{C}_i = [X_i, Z_i, F_i]$, $Z_i = \{0, 1\}$ und $n = \text{Anz}(Z') - 1$).

Andernfalls ($\text{Anz}(Z') = 2$) betrachten wir den zu \mathfrak{C} gehörigen MEDWEDJEW-Automaten $\tilde{\mathfrak{C}} = [X, Z', F']$ als Komponente und verfahren wie im Falle komplizierterer MOORE-Automaten.

Es ist für $1 \leq i \leq n$

$$X_i = X \times Z_1 \times \dots \times \hat{Z}_i \times \dots \times Z_n =_{\text{Df}} X \times Z_1 \times \dots \times Z_{i-1} \times Z_{i+1} \times \dots \times Z_n.$$

Zum Zwecke einer einheitlichen Bezeichnung setzen wir $Z_0 =_{\text{Df}} X$. Wir codieren X_i durch die Menge X^i Booleschen Vektoren:

$$X^i =_{\text{Df}} Z^0 \times Z^1 \times \dots \times \hat{Z}^i \times \dots \times Z^n,$$

wobei für $1 \leq j \leq n$ folgendes festgelegt wird:

$$\begin{aligned} Z^j &= \left\{ [e_1, \dots, e_m] \mid \bigwedge_{\mu=1}^m e_\mu \in \{0, 1\} \wedge \sum_{\mu=1}^n e_\mu \in \{0, 1\} \right. \\ &\quad \left. \wedge m = \text{Anz}(X_j) = \text{Anz}(X) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \text{Anz}(Z_k) = \text{Anz}(X) \cdot 2^{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

Wir ordnen den Zustand 0 aus $Z_j = \{0,1\}$ das m -Tupel $[0, \dots, 0]$ zu und dem Zustand 1 die Menge aller m -Tupel $[e_1, \dots, e_m]$ mit $\sum_{\mu=1}^m e_\mu = 1$.

Ferner sei

$$\mathfrak{E} =_{\text{Df}} \left\{ [e_1, \dots, e_{m_0}] \mid \bigwedge_{\mu=1}^{m_0} e_\mu \in \{0, 1\} \wedge \sum_{\mu=1}^{m_0} e_\mu \geq 1 \wedge \right. \\ \left. \wedge \text{entire} [\text{ld} (\text{Anz} (X))] + 1 \leq m_0 \leq \text{entire} [\text{ld} (\text{Anz} (X))] + 2 \right\}.$$

Dann ist $\text{Anz} (\mathfrak{E}) \geq \text{Anz} (Z_0)$. Es sei ξ_0 eine eindeutige Abbildung von X in \mathfrak{E} . Dann setzen wir $Z^0 =_{\text{Df}} \xi_0(X)$.

Definition. Es sei für $j = 0, \dots, n$ $z^j, z'^j \in Z^j$ und $x, x' \in X^i$ mit

$$x = [z^0, z^1, \dots, \hat{z}^i, \dots, z^n], x' = [z'^0, z'^1, \dots, \hat{z}'^i, \dots, z'^n].$$

Dann definieren wir die *Äquivalenzrelation* \sim durch

$$x \sim x' \leftrightarrow_{\text{Df}} z^0 = z'^0 \wedge \forall j (j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \rightarrow \Sigma z^j = \Sigma z'^j)$$

X^i/\sim entspricht dann eindeutig einer Codierung $C(X_i)$ im Sinne von Satz 2.1:

Es sei $x_i = [z_0, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n] \in X_i$; dann ist

$$C(x_i) =_{\text{Df}} [\xi_0(z_0), z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n].$$

Die Abbildung ξ_i'' von X^i/\sim auf $C(X_i)$ mit

$$\xi_i'' ([z^0, z^1, \dots, \hat{z}^i, \dots, z^n]) =_{\text{Df}} [z^0, \Sigma z^1, \dots, \Sigma \hat{z}^i, \dots, \Sigma z^n]$$

ist eindeutig. Wir identifizieren daher X^i/\sim mit $C(X_i)$.

Hilfssatz 3. Für jede Komponente \mathfrak{E}_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) der Dekomposition \mathfrak{D} existiert ein S -Nervennetz $\mathfrak{N}(\mathfrak{E}_i) = [X^i, Z^i, F^i]$, das \mathfrak{E}_i imitiert. (Dabei ist X^i die Menge aller Booleschen Vektoren, die X^i enthält.)

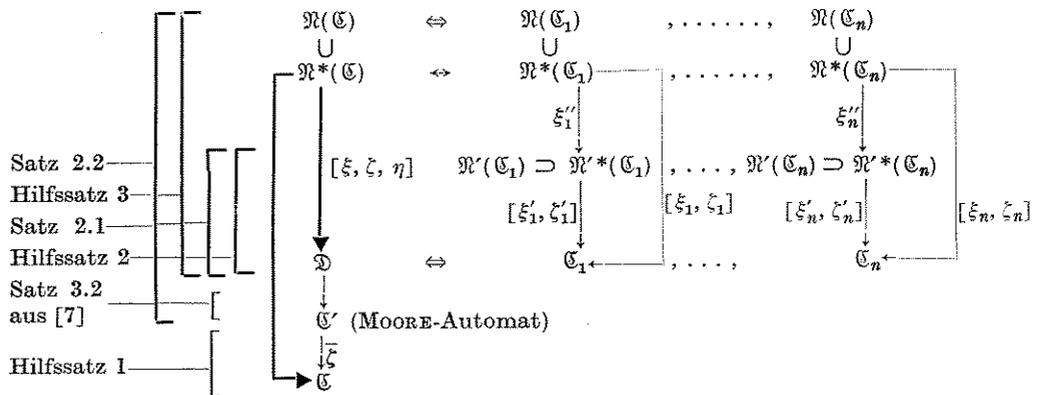


Abb. 3. Illustration zur Konstruktion des stochastischen Nervennetzes $\mathfrak{N}(\mathfrak{E})$, das den stochastischen Automaten \mathfrak{E} imitiert. Dabei bedeutet $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}'$, daß \mathfrak{E} ein Teilautomat von \mathfrak{E}' ist, $\mathfrak{E} \Leftrightarrow \mathfrak{E}_1, \dots, \mathfrak{E}_n$ besagt, daß \mathfrak{E} ein Netz bzw. eine Verknüpfung aus $\mathfrak{E}_1, \dots, \mathfrak{E}_n$ darstellt, und durch $\mathfrak{E} \xrightarrow{[\xi, \zeta, \eta]} \mathfrak{E}'$ wird darauf hingewiesen, daß \mathfrak{E}' homomorphes bzw. 1-homomorphes Bild von \mathfrak{E} ist.

Beweis. Nach Satz 2.1 existiert ein S-Nervennetz $\mathfrak{N}'(\mathbb{C}_i) = [X^i/\sim, Z^i, F'^i]$ mit den Eingabeneuronen $E_1^i, \dots, E_{m_0}^i, \dots, \widehat{E_{m_0+i}^i}, \dots, E_{m_0+n}^i$, das \mathbb{C}_i imitiert.

(Es gibt also einen Teilautomaten $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}_i) = [X^i/\sim, Z^i, F'^i]$ von $\mathfrak{N}'(\mathbb{C}_i)$ und einen Homomorphismus $[\xi_i', \zeta_i']$ von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}_i)$ auf \mathbb{C}_i .) Es ist $Anz(X^i/\sim) = Anz(X_i) = Anz(X) \cdot 2^{n-1} = k$. Wir betrachten das S-Nervennetz $\mathfrak{N}(\mathbb{C}_i) = [X^i, Z^i, F^i]$ mit den $m_0 + (n-1)k$ Eingabeneuronen $E_1^i, \dots, E_{m_0}^i, E_{m_0+1}^{i,1}, \dots, E_{m_0+1}^{i,k}, E_{m_0+2}^{i,1}, \dots, \widehat{E_{m_0+i}^{i,1}}, \dots, \widehat{E_{m_0+i}^{i,k}}, \dots, E_{m_0+n}^{i,k}$ und k inneren S-Neuronen N_1^i, \dots, N_k^i . Letztere gehen hervor aus den inneren Neuronen N_1^i, \dots, N_k^i von $\mathfrak{N}'(\mathbb{C}_i)$, indem jeder Knoten, der einem der Eingabeneuronen $E_{m_0+1}^i, \dots, \widehat{E_{m_0+i}^i}, \dots, E_{m_0+n}^i$ von $\mathfrak{N}'(\mathbb{C}_i)$ entspricht, ersetzt wird durch k gleichartige Knoten. Die dem Eingabeneuron $E_{m_0+v}^i$ ($v = 1, \dots, \widehat{i}, \dots, n$) nun entsprechenden k Knoten von N_μ^i ($\mu = 1, \dots, k$) werden jeweils mit einem Eingabeneuron von $E_{m_0+v}^{i,1}, \dots, E_{m_0+v}^{i,k}$ verknüpft, während $E_1^i, \dots, E_{m_0}^i$ mit der Eingabe von N_μ^i genauso verschaltet werden, wie sie mit der Eingabe von N_μ^i in $\mathfrak{N}'(\mathbb{C}_i)$ verbunden waren.

Behauptung. Es existiert ein X -Homomorphismus ξ_i'' von dem Teilautomaten $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}_i) = [X^i, Z^i, F^i]$ von $\mathfrak{N}(\mathbb{C}_i)$ auf den Teilautomaten $\mathfrak{N}'^*(\mathbb{C}_i)$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi_i''([z^0, z^1, \dots, \widehat{z^i}, \dots, z^n]) &=_{\text{Df}} [z^0, \Sigma z^1, \dots, \widehat{\Sigma z^i}, \dots, \Sigma z^n] \\ &= [z^0, \zeta_1'(z^1), \dots, \zeta_i'(z^i), \dots, \zeta_n'(z^n)]. \end{aligned}$$

Dabei ist F^i die Einschränkung der Funktion F'^i auf $Z^i \times X^i$. Wegen $\xi_i'' : X^i \rightarrow X^i/\sim$ feuert für $v = 1, \dots, n-1$ genau ein Eingabeneuron von $E_{m_0+v}^{i,1}, \dots, E_{m_0+v}^{i,k}$ dann und nur dann, wenn das Eingabeneuron $E_{m_0+v}^i$ von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}_i)$ feuert, d. h., wenn $\sum z_v = 1$ ist.

Bei Eingabe von $[z^0, z^1, \dots, \widehat{z^i}, \dots, z^n]$ aus X^i in $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}_i)$ reagiert dieses Netz also genauso wie $\mathfrak{N}'^*(\mathbb{C}_i)$ bei Eingabe von

$$[z^0, \Sigma z^1, \dots, \widehat{\Sigma z^i}, \dots, \Sigma z^n] = \xi_i''([z^0, z^1, \dots, \widehat{z^i}, \dots, z^n]).$$

ξ_i'' ist daher ein X -Homomorphismus von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}_i)$ auf $\mathfrak{N}'^*(\mathbb{C}_i)$, damit ist $[\xi_i, \zeta_i] =_{\text{Df}} [\xi_i' \circ \xi_i'', \zeta_i' \circ \zeta_i'']$ ein $X-Z$ -Homomorphismus von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}_i)$ auf \mathbb{C}_i .

Die S-Nervennetze $\mathfrak{N}(\mathbb{C}_1), \dots, \mathfrak{N}(\mathbb{C}_n)$ werden nun zu einem neuen S-Nervennetz $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ untereinander verknüpft wie folgt: m_0 Eingabeneuronen E_1, \dots, E_{m_0} bilden die Eingabe von $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$. Dabei ersetzt E_μ ($\mu = 1, \dots, m_0$) das Eingabeneuron E_μ^i von $\mathfrak{N}(\mathbb{C}_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Das Eingabeneuron $E_{m_0+j}^{i,v}$ ($j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, v \in \{1, \dots, k\}$) von $\mathfrak{N}(\mathbb{C}_i)$ wird ersetzt durch das Axon des inneren Neurons N_j^i des S-Nervennetzes $\mathfrak{N}(\mathbb{C}_j)$. Die Ausgabe von $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ besteht aus der geordneten Menge aller Axone der inneren Neuronen.

Behauptung. $\mathfrak{N}(\mathbb{C})$ ist eine 1-Imitation von \mathbb{C} .

Da \mathbb{C} homomorphes Bild von \mathfrak{D} ist, genügt es zu zeigen: Es existiert ein Teilautomat $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ von $\mathfrak{N}(\mathbb{C}) = \left[Z^0, \prod_{i=1}^n Z^i, \prod_{i=1}^n Z^i, \overline{F}, \overline{G} \right]$ und ein Homomor-

phismus $[\xi, \zeta, \eta]$ von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ auf \mathfrak{D} . Wir setzen

$$\mathfrak{N}^*(\mathbb{C}) =_{\text{Def}} [Z^0, Z^*, Z^*, F^*, G^*] \text{ mit } Z^* = \times_{i=1}^n Z^i,$$

wobei für $[z^1, \dots, z^n], [z'^1, \dots, z'^n] \in Z^*, z^0 \in Z^0$ gilt:

$$\begin{aligned} F^*[[z^1, \dots, z^n], z^0] ([z'^1, \dots, z'^n]) \\ &= \prod_{i=1}^n F^i[z^i, [z^0, z^1, \dots, \widehat{z^i}, \dots, z^n]] (z'^i) \quad \text{und} \\ G^*[[z^1, \dots, z^n], z^0] ([z'^1, \dots, z'^n]) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \bigwedge_{i=1}^n z^i = z'^i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Weiter definieren wir für $z^i \in Z^i$ ($i = 0, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \xi(z^0) &=_{\text{Def}} \xi_0^{-1}(z^0); \\ \zeta([z^1, \dots, z^n]) &=_{\text{Def}} [\zeta_1(z^1), \dots, \zeta_n(z^n)] = [\Sigma z^1, \dots, \Sigma z^n]; \\ \eta([z^1, \dots, z^n]) &=_{\text{Def}} \mu_0 \circ \zeta([z^1, \dots, z^n]), \end{aligned}$$

wenn μ die durch M definierte Abbildung von Z in Y ist.

Wir zeigen, daß $[\xi, \zeta, \eta]$ ein 1-Homomorphismus von $\mathfrak{N}^*(\mathbb{C})$ auf \mathfrak{D} ist. Für $z^* = [z^1, \dots, z^n] \in Z^*, z = [z_1, \dots, z_n] \in Z, z^0 \in Z^0, p \in W(Z^0)^1$ und $y \in Y$ gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad F^*[z^*, z^0] (\zeta^{-1}(z)) &= F[\zeta(z^*), \xi(z^0)] (z); \\ (2) \quad H^*[z^*, p z^0] (\zeta^{-1}(z) \times Y \cdot \eta^{-1}(q)) \\ &= \sum_{z' \in Z} H[\zeta(z^*), \xi(p)] (\{z'\} \times \{q\}) \cdot F[z', \xi(z^0)] (z). \end{aligned}$$

Beweis. ad (1).

$$\begin{aligned} &\sum_{z^{**} \in \zeta^{-1}(z)} F^*[z^*, z^0] (z^{**}) \\ &= \sum_{[z^1, \dots, z^n] \in \zeta^{-1}(z)} \prod_{i=1}^n F^i[z^i, [z^0, z^1, \dots, \widehat{z^i}, \dots, z^n]] (z^i) \\ &= \sum_{z^1 \in \zeta_1^{-1}(z_1)} \dots \sum_{z^n \in \zeta_n^{-1}(z_n)} \prod_{i=1}^n F^i[z^i, [z^0, z^1, \dots, \widehat{z^i}, \dots, z^n]] (z^i) \\ &= \prod_{i=1}^n F_i[\zeta_i(z^i), \xi_i([z^0, z^1, \dots, \widehat{z^i}, \dots, z^n])] (z_i) \\ &= \prod_{i=1}^n F_i[\zeta_i(z^i), [\xi_0^{-1}(z^0), \zeta_1(z^1), \dots, \widehat{\zeta_i(z^i)}, \dots, \zeta_n(z^n)]] (z_i) \\ &= F[[\zeta_1(z^1), \dots, \zeta_n(z^n)], \xi_0^{-1}(z^0)] ([z_1, \dots, z_n]) \\ &= F[\zeta([z^1, \dots, z^n]), \xi(z^0)] (z) = F[\zeta(z^*), \xi(z^0)] (z). \end{aligned}$$

ad (2). Wir beweisen diese Beziehung durch Induktion über die Länge von p . Für $p = e$ geht Bedingung (2) in (1) über und ist daher erfüllt. Sei Gleichung (2) für alle p der Länge n richtig. Wir behaupten ihre Gültigkeit für alle $p \in W(Z^0)$ mit $l(p) = n$ und $x \in Z^0$:

¹⁾ $W(Z^0)$ ist die freie Worthalbgruppe über Z^0 .

Induktionsbehauptung :

$$H^*[z^*, p x z^0] (\zeta^{-1}(z) \times Y \cdot \eta^{-1}(q y)) \\ = \sum_{z' \in Z} H[\zeta(z^*), \xi(p x)] (\{z'\} \times \{q y\}) \cdot F[z', \xi(z^0)] (z).$$

Beweis. $H^*[z^*, p x z^0] (\zeta^{-1}(z) \times Y \cdot \eta^{-1}(q y)) =$

$$= \sum_{z'' \in Z^*} H^*[z^*, p x] (\{z''\} \times Y \cdot \eta^{-1}(q)) \cdot H[z'', z^0] (\zeta^{-1}(z) \times \eta^{-1}(y)) \\ = \sum_{z'' \in \eta^{-1}(y)} H^*[z^*, p x] (\{z''\} \times Y \cdot \eta^{-1}(q)) \cdot F^*[z'', z^0] (\zeta^{-1}(z)) \\ = \sum_{z'' \in \zeta^{-1} \mu^{-1}(y)} F[\zeta(z''), \xi(z^0)] (z) \cdot H^*[z^*, p x] (\{z''\} \times Y \cdot \eta^{-1}(q)) \\ = \sum_{\bar{z} \in \mu^{-1}(y)} F[\bar{z}, \xi(z^0)] (z) \cdot \sum_{z'' \in \zeta^{-1}(\bar{z})} H^*[z^*, p x] (\{z''\} \times Y \cdot \eta^{-1}(q))$$

(wegen Induktionsvoraussetzung :

$$= \sum_{\bar{z} \in \mu^{-1}(y)} F[\bar{z}, \xi(z^0)] (z) \cdot \sum_{\bar{z} \in Z} H[\zeta(z^*), \xi(p)] (\{[\bar{z}] \times \{q\}\}) \cdot F[\bar{z}, \xi(x)] (\bar{z}) \\ = \sum_{\bar{z} \in \mu^{-1}(y)} F[\bar{z}, \xi(z^0)] (z) \cdot H[\zeta(z^*), \xi(p x)] (\{\bar{z}\} \times \{q \cdot \mu(\bar{z})\}) \\ = \sum_{\bar{z} \in \mu^{-1}(y)} H[\zeta(z^*), \xi(p x)] (\{\bar{z}\} \times \{q y\}) \cdot F[\bar{z}, \xi(z^0)] (z) \\ = \sum_{\bar{z} \in Z} H[\zeta(z^*), \xi(p x)] (\{\bar{z}\} \times \{q y\}) \cdot F[\bar{z}, \xi(z^0)] (z). \blacksquare$$

Satz 2.3. Zu jedem endlichen stochastischen MEALY-Automaten $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, F, G]$ mit determinierter Ergebnissfunktion existiert ein S-Nervennetz, das \mathfrak{C} imitiert.

Beweis. Wir imitieren zunächst die Dekomposition des zu \mathfrak{C} gehörigen MEDWEDJEW-Automaten $\tilde{\mathfrak{C}} = [X, Z, F]$ wie in Satz 2.2.

Ist $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{C}})$ das Nervennetz, das sich aus $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{C}})$ dadurch ergibt, daß man die Axone aller inneren und Eingabeneuronen von $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{C}})$ zur Ausgabe von $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{C}})$ zusammenfaßt, so ist $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{C}})$ eine Imitation von $\tilde{\mathfrak{C}}$.

Beweis. Es sei λ die durch G definierte eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in Y . Wir definieren dann die eindeutige Abbildung η von $Z^* \times Z^0$ in Y durch

$$\eta =_{\text{Df}} \lambda \circ (\zeta \times \xi).$$

Wegen

$$G^*[z^*, z^0] ([z^{**}, z^{00}]) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z^* = z^{**} \wedge z^0 = z^{00}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist das Tripel $[\xi, \zeta, \eta]$ ein Homomorphismus von dem Teilautomaten $\mathfrak{N}^*(\tilde{\mathfrak{C}}) = [Z^0, Z^* \times Z^0, Z^*, F^*, G^*]$ von $\mathfrak{N}(\tilde{\mathfrak{C}})$ auf \mathfrak{C} . \blacksquare

Korollar 2.4. Zu jedem endlichen S-Automaten \mathfrak{C} existiert ein S-Nervennetz $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$, das \mathfrak{C} 1-imitiert oder imitiert.

Beweis. (Ist $Anz(Z) = Anz(Y) = 1$, so wird \mathfrak{C} imitiert durch ein Neuron, das nach anfänglicher Erregung ständig aktiv ist (vgl. Abb. 4).)

Ist $Anz(Y) > 1$ und erfüllt \mathfrak{C} nicht die Voraussetzungen der Sätze 2.1, 2.2 oder 2.3, so bilden wir den zu \mathfrak{C} äquivalenten stochastischen MOORE-Auto-

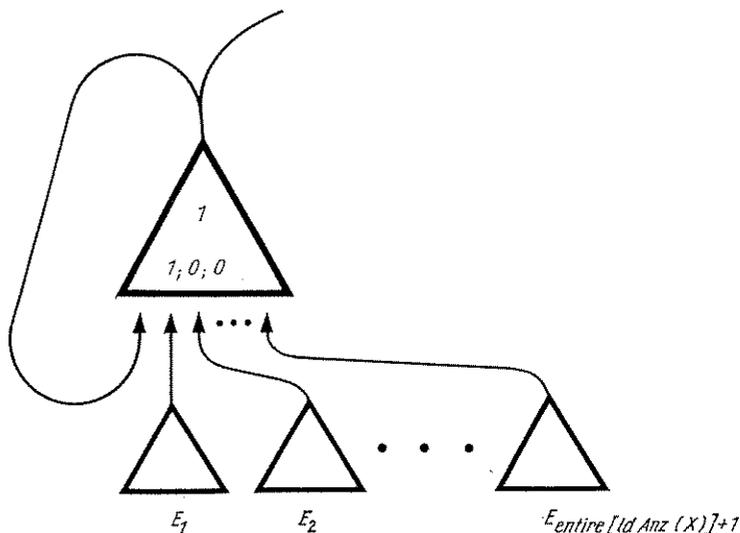


Abb. 4

maten mit determinierter Markierung nach Hilfssatz 1 und verfahren wie in Satz 2.2. ■

Beispiel. Es sei gegeben die Dekomposition $\mathfrak{D} = [\{0\}, Y, \{0, 1\} \times \{0, 1\}, H]$ eines autonomen S-Automaten. Die Ausgabefunktion sei determiniert. \mathfrak{D} bestehe aus den Komponenten $\mathfrak{C}_1 = [\{0\}, \{0, 1\}, F_1]$ und $\mathfrak{C}_2 = [\{[0, 0], [0, 1]\}, \{0, 1\}, F_2]$, die schleifenfrei miteinander verknüpft sind. Dabei sind die Überföhrungsfunktionen gegeben durch die folgenden Tabellen.

F_1 :

	0	1
0	0,4	0,6
1	0,9	0,1

F_2 :

	[0, 0]	0	1	[0, 1]	0	1
0		0,7	0,3	0	0,6	0,4
1		0,5	0,5	1	0,1	0,9

Das Eingangssignal 0 des Systems codieren wir durch das Signal $\xi_0(0) = 1$. $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}_1)$ besteht aus einem Neuron $N = [2; 1; 0; 2; 0,6; (0,5); 0,6]$. $\mathfrak{N}(\mathfrak{C}_2)$ besitzt $Anz(X_2) = 2$ Neuronen N_1 und N_2 mit

$$N_1 =_{\text{Df}} [4; 0; 1; 2; 0,3; 0,2; \%],$$

$$N_2 =_{\text{Df}} [6; 0; 0; 4; 0,4; 0,5; \%],$$

wenn $x_1 = [1, 0]$ und $x_2 = [1, 1]$ ist ($x_1, x_2 \in X^2$; vgl. S. 415).

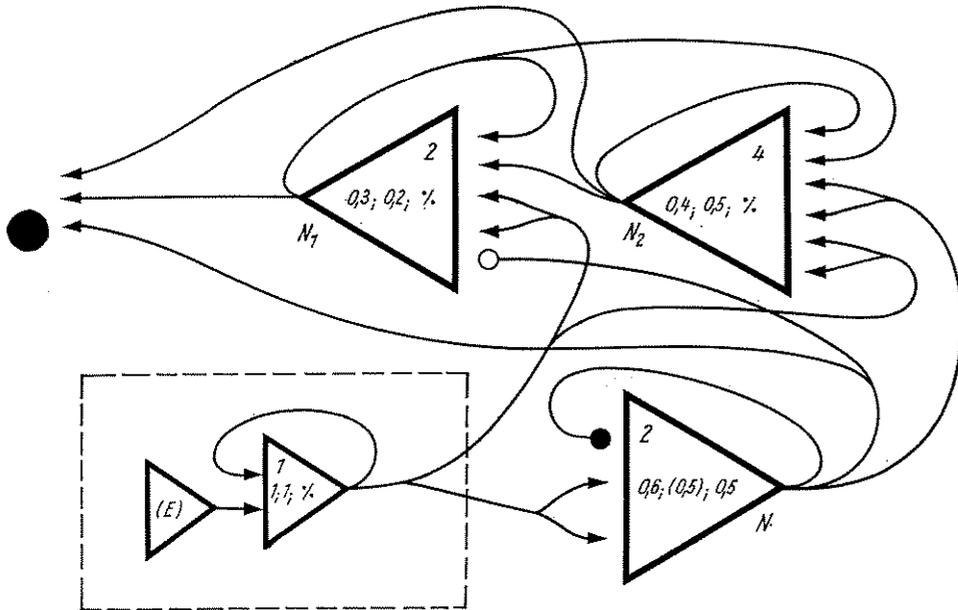


Abb. 5. Beispiel

Da \mathfrak{D} unabhängig von der Umgebung arbeitet (autonom), kann man die Eingabe ersetzen durch ein stets aktives Neuron (vgl. Abb. 5).

3. Abstraktes nicht-deterministisches Neuron. Nicht-deterministisches Nervennetz

Ähnlich wie in Abschnitt 1 definieren wir nun die Begriffe nicht-deterministisches Neuron und nicht-deterministisches Nervennetz.

Definition 3.1. Das 4-Tupel $N = [a, d, h, \varrho]$ heißt *nicht-deterministisches Neuron (ND-Neuron)* =_{DF}

1. a, d und h sind natürliche Zahlen mit $a > 0$ und $d, h \geq 0$.
2. ϱ ist eine eindeutige Abbildung von $nz \times nz \times nz$ in die Menge $\{\{1\}, \{0,1\}, \{0\}\}$.
3. N besitzt a treibende, d dämpfende und h hemmende Knoten. Die geordnete Menge aller Knoten heißt *Eingabe* von N .
4. N ist eine bistabile nicht-deterministische Komponente $[X, \{0,1\}, f]$ (vgl. [7] S. 308). Die Menge X der Eingabesignale besteht aus den Booleschen Vektoren der Länge $a + d + h$. Ist $T(t), D(t)$ bzw. $H(t)$ die Anzahl der erregten treibenden, dämpfenden bzw. hemmenden Knoten von N im Takt t , $x \in X$ und $z \in \{0,1\}$, so ist

$$\varrho(T(t), D(t), H(t)) = f(z, x).$$

Wir beschränken uns wieder auf einen Spezialfall: Es seien s, S positive, ganze Zahlen mit $s \leq S$.

$$\varrho(T(t), D(t), H(t)) = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } T(t) - D(t) < s \vee H(t) \geq 1, \\ \{0,1\} & \text{falls } S > T(t) - D(t) \geq s, \\ \{1\}, & \text{falls } T(t) - D(t) \geq S; \end{cases}$$

s heißt *unterer*, S *oberer Schwellenwert* von N . Wir notieren N durch das Quintupel $[a, d, h, s, S]$.

Bemerkung. N ist ein McCULLOCH-PITTS-Neuron, falls $s = S$ und $d = 0$ ist. Ist $s = S$, so bezeichnen wir N als *determiniertes ND-Neuron*.

Definition 3.2. Es sei $N' = [a, d, h, \sigma]$ ein S-Neuron und $N = [a, d, h, \varrho]$ ein ND-Neuron. Wir nennen N *das zu N' gehörige ND-Neuron*, notiert durch $N = ND(N')$, falls gilt:¹⁾

$$\varrho(T(t), D(t), H(t)) = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } \sigma(T(t), D(t), H(t)) = 0, \\ \{0,1\}, & \text{falls } 0 < \sigma(T(t), D(t), H(t)) < 1, \\ \{1\}, & \text{falls } \sigma(T(t), D(t), H(t)) = 1. \end{cases}$$

Das *nicht-deterministische Nervennetz (ND-Nervennetz)* wird analog zum S-Nervennetz definiert. Wir geben lediglich die Definition der Überföhrungsfunktion f des mit $\mathfrak{N} = [\mathfrak{E}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, f, g]$ notierten Nervennetzes aus den inneren Neuronen N_1, \dots, N_n ($N_i = [\mathfrak{E} \times \{0,1\}^{n-1}, \{0,1\}, f_i]$; $i = 1, \dots, n$) an:

$$\begin{aligned} f([e'_1, \dots, e'_n], [e_1, \dots, e_m]) &= \\ &= \prod_{i=1}^n f_i(e'_i, [e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_i, \dots, e'_n]). \end{aligned}$$

4. Die Imitation endlicher nicht-deterministischer Automaten durch nicht-deterministische Nervennetze

Die Begriffe Imitation bzw. n -Imitation werden in gleicher Weise definiert wie im stochastischen Fall. Es erscheint nicht sinnvoll, diese Definitionen hier ausführlich anzugeben.

Ähnlich wie das Korollar in Abschnitt 2 beweist man (unter Benutzung von Aussagen, die den Sätzen 2.1, 2.2 und 2.3 entsprechen) den folgenden Satz:

Satz 4.1. *Zu jedem endlichen ND-Automaten \mathfrak{B} existiert ein ND-Nervennetz $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$, das \mathfrak{B} imitiert oder 1-imitiert.*

Beweis. Nach dem Korollar 7.2 aus [7] existiert eine Dekomposition \mathfrak{D} von \mathfrak{B} aus bistabilen Komponenten $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ mit determinierter Ausgabe. Diese werden zunächst durch Nervennetze $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}_1), \dots, \mathfrak{N}(\mathfrak{B}_n)$ derart imitiert,

¹⁾ Die Menge der durch Anwendung des Operators $ND(\)$ auf S-Neuronen des Typs $[a, d, h, s, E, \tau, \delta]$ definierten ND-Neuronen umfaßt echt die Menge der durch obige spezielle Definition der Abbildung ϱ charakterisierten ND-Neuronen. Letztere erhält man durch die Anwendung dieses Operators auf S-Neuronen mit $\tau = \delta$ und $E < \tau$. Der untere Schwellenwert eines ND-Neurons N besagten Typs ist gleich dem Schwellenwert s des S-Neurons, das durch $ND(\)$ auf N abgebildet wird, während der obere Schwellenwert gleich $\text{entire} \left[s + \frac{1+E}{\tau} \right] + 1$ ist.

daß wieder jedem Eingabesignal der Komponente \mathfrak{B}_i ein Neuron N_v^i ($1 \leq v \leq \text{Anz}(X_i)$) zugeordnet ist, das bei Eingabe einer geeigneten Codierung dieses Signals wie die Komponente \mathfrak{B}_i reagiert, während die anderen Neuronen $N_1^i, \dots, N_{v-1}^i, N_{v+1}^i, \dots, N_n^i$ passiv bleiben. Die $\mathfrak{R}(\mathfrak{B}_i)$ werden dann verknüpft zu einem neuen Netz $\mathfrak{R}(\Omega) = \mathfrak{R}(\mathfrak{B})$, das Ω und damit \mathfrak{B} imitiert oder I-imitiert.

Es ist an dieser Stelle überflüssig, die Einzelheiten dieses Beweises auszuführen, da es nur eine Wiederholung der wesentlichen Gedanken des entsprechenden Beweises im stochastischen Fall darstellen würde. Es ist jedoch zu bemerken, daß wir einfachere ND-Neuronen zur Konstruktion der Imitation eines ND-Automaten benutzen als diejenigen, welche sich durch Anwendung des Operators $ND(\)$ auf die S-Neuronen der Form $[a, d, h, s, E, \tau, \delta]$ ergeben würden (vgl. Fußnote auf Seite 422).

Literatur

- [1] KEIDEL, W. D., Kurzgefaßtes Lehrbuch der Physiologie. Stuttgart 1967.
- [2] KLEENE, S. C., Representation of events in nerve nets and finite automata. In: Automata Studies; Princeton 1956; pp. 3—41.
- [3] NEUMANN, J. v., Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. In: Automata Studies; Princeton 1956; pp. 43—98.
- [4] STARKE, P. H., Die Imitation endlicher МЕРВЕДЖЕВ-Automaten durch Nervennetze. Z. Math. Logik Grundl. Math. 11 (1965).
- [5] STARKE, P. H., Theorie stochastischer Automaten I. EIK 1 (1965) 1, 5—32.
- [6] STARKE, P. H., Einige Bemerkungen über nicht-deterministische Automaten. EIK 2 (1966) 2, 61—82.
- [7] ZECH, K.-A., Homomorphe Dekomposition stochastischer und nicht-deterministischer Automaten. EIK 7 (1971) 5/6, 297—316.

Kurzfassung

Als Verallgemeinerung vorhandener mathematischer Neuronenmodelle (McCULLOCH/PITTS und v. NEUMANN) werden die Begriffe abstraktes stochastisches bzw. nicht-deterministisches Neuron definiert. Es wird bewiesen, daß es für jeden endlichen stochastischen Automaten ein stochastisches Neuronennetz gibt, das diesen (im wohldefinierten Sinne) imitiert. Für den nicht-deterministischen Fall wird dieser Beweis nur angedeutet.

Abstract

The conceptions of the abstract stochastic and non-deterministic neuron respectively are defined as generalizations of existing mathematical nerve models (McCULLOCH/PITTS and v. NEUMANN). It is proved that for every finite stochastic automaton there exists a stochastic nerve net imitating that automaton in a well-defined sense. For the non-deterministic case this proof is only indicated.

Резюме

Определяется понятие абстрактного стохастического и абстрактного недетерминистического нейрона как обобщение имеющихся математических моделей нейронов (Маккаллоха/Питтса и Нейманна). Доказывается, что

для любого конечного стохастического автомата существует стохастическая нейронная сеть, имитирующая этот автомат в точно дефинированном смысле. Для недетерминистического случая это доказательство лишь затрагивается.

(Eingang: erste Fassung am 3. 2. 1970,
revidierte Fassung am 1. 2. 1971)

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. K.-A. Zech
1058 Berlin
Oderberger Str. 42