Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik
EIK 7 (1971) 5/6, 297 – 316

Homomorphe Dekomposition stochastischer und nicht-deterministischer Automaten[1])

Von KARL-ADOLF ZECH[2])

Inhalt

0. Einleitung

Zu einem größeren Problem der Praxis gehört die physikalisch-technische Verwirklichung eines abstrakten Automaten, der für ein bestimmtes Problem (z. B. die Realisierung einer sequentiellen Wortfunktion) mit Hilfe eines Synthesealgorithmus konstruiert wurde. Es gilt, dieses abstrakte System so zu codieren, daß der kombinatorische Aufwand der entsprechenden Schaltung (und/oder z. B. die Fehleranfälligkeit) möglichst gering wird. Diesem *Codierungsproblem* (assignment problem) wurde in der Literatur der letzten zehn Jahre sehr große Beachtung geschenkt. Das große Verdienst u. a. von J. HARTMANIS und R. E. STEARNS ist es, zu diesem Zweck in den Jahren 1960 bis 1966 eine alge-

---

1) Aus der Diplomarbeit an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Bereich Kybernetik-Rechentechnik (Direktor: Prof. Dr. H. FRANK), 1969.

2) Institut für Nachrichtentechnik, Berlin-Schöneweide, Rechenzentrum, Arbeitsgruppe rechnergestützter Schaltungsentwurf (Direktor: Dr.-Ing. D. LOCHMANN).

braische Strukturtheorie der endlichen Automaten entwickelt zu haben, die die mathematische Grundlage für eine Reihe von Algorithmen zur maschinellen Behandlung dieser Fragen bildet (vgl. [3]). Eine im Abstraktionsgrad weiter getriebene und einer Algorithmisierung weniger zugängliche algebraische Theorie wurde 1963 von K. B. Krohn und J. L. Rhodes entwickelt[1]). 1964 verallgemeinerte G. C. Bacon [1] die von Hartmanis [2] erzielten Ergebnisse auf den Fall stochastischer Automaten. Für die Existenz einer *isomorphen Dekomposition*, d. h. einer im gewissen Sinne isomorphen partiellen Codierung, werden allerdings sehr einschränkende Forderungen an den Automaten gestellt.

Wir werden in folgendem einen konstruktiven Beweis dafür angeben, daß jeder stochastische und nicht-deterministische Automat mit endlicher Zustandsmenge eine homomorphe (Binär-)Codierung besitzt, also homomorphes Bild eines „Netzes" aus bistabilen Elementen ist. Dabei geben wir noch eine Übertragung der Sätze von Hartmanis [2] bzw. Bacon [1] auf den nicht-deterministischen Fall an.

Den Anstoß zu diesen Untersuchungen gab ein vom Verfasser im Frühjahrssemester 1969 gehaltener Vortrag, der im Rahmen des von Doz. Dr. habil. P. H. Starke geleiteten Seminars „Theorie abstrakter Automaten" stattfand und sich mit einigen diesbezüglichen Fragen beschäftigte. Eine Reihe von Anregungen verdanke ich den Diskussionen, die innerhalb des Forschungs- und Ausbildungskollektivs „Abstrakte Automaten" des Bereichs Kybernetik/Rechentechnik (Sektion Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin) geführt wurden. Ich möchte an dieser Stelle besonders Herrn Dr. P. H. Starke für die vielen wertvollen Hinweise herzlich danken.

1. Stochastische Automaten. Vorbereitungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige grundlegende Definitionen angeben und die Notation festlegen. Wir beziehen uns dabei vorwiegend auf Starke [6].

Definition 1.1. Das Quadrupel $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ heißt *stochastischer Automat* (kurz: *S-Automat*), wenn

a) X, Y, Z beliebige nichtleere Mengen sind und

b) H eine auf $Z \times X$ definierte Funktion ist, die diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße über $Y \times Z$ als Werte $H[z, x]$ hat.

Die Mengen X, Y und Z werden als die Mengen der *Eingabe-* und *Ausgabesignale* bzw. *Zustände* interpretiert. Der Automat arbeitet in einer *diskreten Zeitskala* mit abzählbar unendlich vielen Takten $t = 1, 2, \ldots$. Befindet sich der Automat im Takt t im Zustand z aus Z und erhält das Eingabesignal x aus X, so gibt $H[z, x](y, z')$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß $\mathfrak{C}$ das Signal y aus Y ausgibt und sich im Takt $t + 1$ im Zustand z' befindet.

Die *Überführungsfunktion* F von $\mathfrak{C}$ ist festgelegt durch

$$F[z, x](z') =_{\mathrm{Df}} \sum_{y \in Y} H[z, x](y, z')$$

---

[1]) U. a.: Krohn, K. B., Rhodes, J. L., Algebraic theory of machines I. The main decomposition theorem. Techn. Rept. Dept. Math., Univ. Calif., Berkeley 1963. Vgl. auch: Zeiger, H. P., Cascade synthesis of finite state machines. Inform. and Control **10** (1967) 225–228.

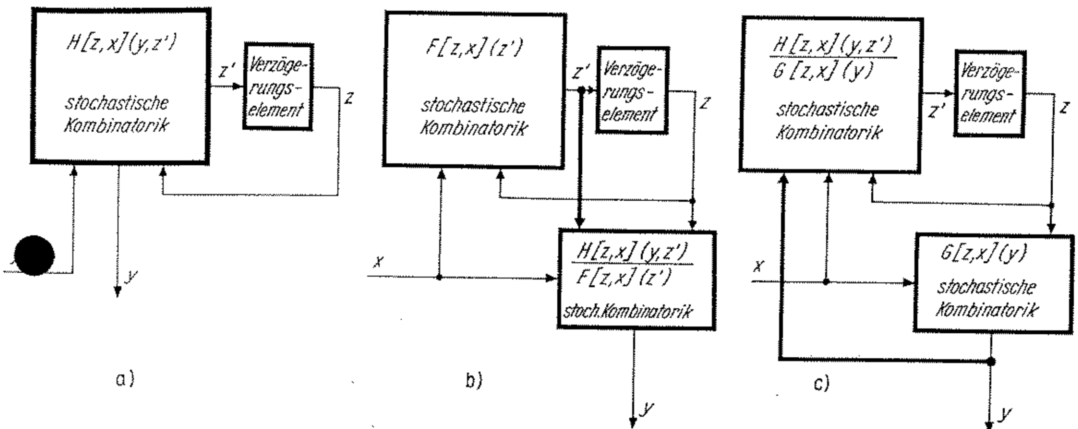

Abb. 1. a) Stochastischer Automat, b) und c) getrennte (aber nicht unabhängige) Berechnung des Folgezustandes und des Ausgabesignals (äquivalente Darstellungen)

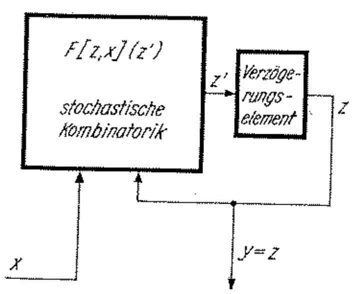

Abb. 2. Stochastische Komponente

und die *Ergebnisfunktion* G von $\mathfrak{C}$ durch

$$G[z, x]\,(y) =_{\mathrm{Df}} \sum_{z' \in Z} H[z, x]\,(y, z') \qquad \text{(vgl. Abb. 1).}$$

$\mathfrak{C}$ heißt *Z-endlich*, wenn die Menge Z endlich ist. $\mathfrak{C}$ heißt *Komponente*, wenn die Zustandsmenge Z mit $\mathrm{Card}(Z) \geqq 2$ gleich der Menge der Ausgabesignale Y ist und $G[z, x]\,(y)$ höchstens für $y = z$ von Null verschieden ist. Wir notieren $\mathfrak{C}$ durch $[X, Z, F]$ (Abb. 2).

Definition 1.2. Es seien $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ und $\mathfrak{C}' = [X', Y', Z', H']$ zwei beliebige S-Automaten. Das Tripel $[\xi, \eta, \zeta]$ heißt *Homomorphismus* von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}'$, wenn

1) ξ bzw. η bzw. ζ eindeutige Abbildungen von X auf X' bzw. Y auf Y' bzw. Z auf Z' sind und
2) für alle $z \in Z$, $x \in X$, $y' \in Y$ und $z' \in Z'$ gilt:

$$\sum_{y \in \eta^{-1}(y'),\, z^* \in \xi^{-1}(z')} H[z, x]\,(y, z^*) = H'[\zeta(z), \xi(x)]\,(y', z')\,.$$

Sind die Abbildungen eineindeutig, so heißt das Tripel ein *Isomorphismus* von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}'$. Bezeichnen I_X bzw. I_Y die identischen Abbildungen von X bzw. Y auf sich, so heißt der Homomorphismus $[I_X, I_Y, \zeta]$ bzw. ζ *Z-Homomorphismus* von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}'$.

Definition 1.3. Der Z-endliche S-Automat $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ heißt *Netz* aus den Komponenten $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ mit $\mathfrak{C}_i = [X_i, Z_i, F_i]$, wenn gilt:

1) $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$;

2) $X_i = X \times Z_1 \times \cdots \times \widehat{Z_i} \times \cdots \times Z_n =_{\mathrm{Df}} X \times Z_1 \times \cdots \times Z_{i-1} \times Z_{i+1} \times \cdots \times Z_n$

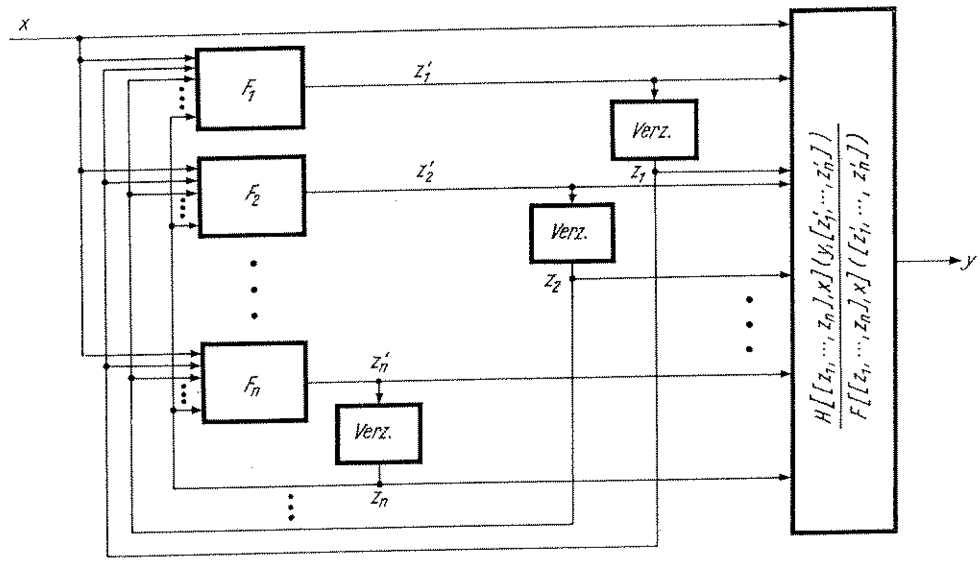

Abb. 3. Der Automat $\mathfrak{C} = [X, Y, \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} Z_i, H]$ als Netz aus den Komponenten $\mathfrak{C}_1 = [X \times Z_2 \times \cdots \times Z_n, Z_1, F_1], \ldots, \mathfrak{C}_n = [X \times Z_1 \times \cdots \times Z_{n-1}, Z_n, F_n]$. Für die Ausgabe wird eine zusätzliche stochastische Kombinatorik benötigt

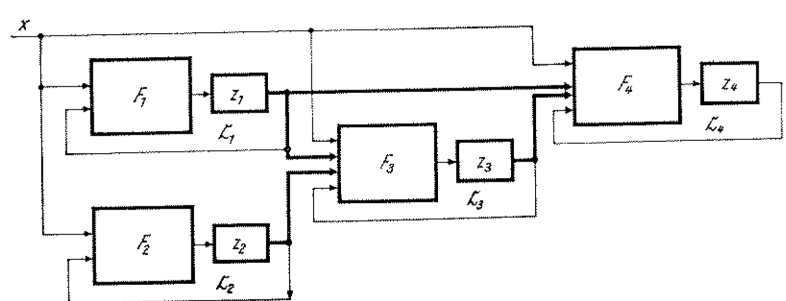

Abb. 4. Der stochastische Automat $\mathfrak{C} = \left[X, \overset{4}{\underset{i=1}{\times}} Z_i, F\right]$ als schleifenfreies (aber nicht rückkopplungsfreies) Netz aus $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{C}_4$ (ein Beispiel, ohne Ausgabe)

3) $F[[z_1, \ldots, z_n], x]([z'_1 \ldots, z'_n]) = \prod_{i=1}^{n} F_i[z_i, [x, z_1, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_n]](z'_i)$

$\mathfrak{C}$ heißt *schleifenfreies Netz* aus den $\mathfrak{C}_i$, falls für $i = 2, \ldots, n$ F_i höchstens von den Komponenten $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{i-1}$ abhängt.

Definition 1.4. Das (schleifenfreie) Netz $\mathfrak{D}$ aus den stochastischen Komponenten $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ heißt *(schleifenfreie) homomorphe Dekomposition* des S-Automaten $\mathfrak{C}$, falls $\mathfrak{C}$ Z-homomorphes Bild eines Teilautomaten von $\mathfrak{D}$ ist und für $i = 1, \ldots, n$ gilt: $\mathrm{Card}(Z_i) < \mathrm{Card}(Z)$.

2. Die isomorphe Dekomposition Z-endlicher stochastischer Automaten

2.1. Zerlegungen der Zustandsmenge eines stochastischen Automaten

In der Menge $\mathfrak{M}$ aller Zerlegungen einer Menge Z können wir eine Halbordnungsrelation erklären. Seien π_1 und π_2 Zerlegungen aus $\mathfrak{M}$. π_1 heißt *Verfeinerung* von π_2 genau dann, wenn für jede Klasse N_1 aus π_1 eine Klasse N_2 aus π_2 mit $N_1 \subseteq N_2$ existiert. Gilt außerdem für mindestens eine Klasse N_1 aus π_1 die Beziehung $N_1 \subset N_2$ für ein N_2 aus π_2, so heißt π_1 *echte* Verfeinerung von π_2. Diese Relationen werden durch $\pi_1 \leqq \pi_2$ bzw. $\pi_1 < \pi_2$ notiert. Damit bildet $[\mathfrak{M}, \leqq]$ einen (ordnungstheoretischen) *Verband*, in dem wir die folgenden Operationen definieren können:

$$\pi_1 + \pi_2 = \sup(\pi_1, \pi_2)$$
$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \{N_1 \cap N_2 / N_1 \in \pi_1 \wedge N_2 \in \pi_2 \wedge N_1 \cap N_2 \neq \emptyset\} = \inf(\pi_1, \pi_2).$$

Die feinste Zerlegung (die Zerlegung in Einermengen) bezeichnen wir mit 0, die gröbste mit 1. Der Verband $[\mathfrak{M}, +, \cdot]$ ist komplementär, aber i. a. nicht distributiv.

Definition 2.1. $\mathfrak{M} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ ist eine in bezug auf den S-Automaten $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ *unabhängige* Menge von Zerlegungen von Z, wenn

1) $\mathfrak{M}$ nicht leer ist und
2) die Beziehung $F[z, x]\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_i\right) = \prod_{i=1}^{n} F[z, x](N_i)$ für alle x aus X, z aus Z und N_i aus π_i richtig ist.[1])

Bemerkung. Für determinierte Automaten ist jede Menge von Zerlegungen von Z unabhängig.

Das folgende, leicht zu beweisende Lemma erlaubt die Konstruktion eines einfachen Algorithmus zur Entscheidung dieser Eigenschaft.

Lemma 2.1. *$\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ ist eine in bezug auf den S-Automaten $\mathfrak{C}$ unabhängige Menge von Zerlegungen von Z genau dann, wenn für $1 \leqq i \leqq n$*

1) $\{\pi_1, \ldots, \pi_i\}$,
2) $\{\pi_{i+1}, \ldots, \pi_n\}$ *und*
3) $\left\{\prod_{j=1}^{i} \pi_j, \prod_{j=i+1}^{n} \pi_j\right\}$

unabhängige Mengen sind. ∎

---

[1]) Vgl. Beispiel 1, Seite 306.

Definition 2.2. a) Das Paar $[\pi, \tau]$ von Zerlegungen von Z heißt *Zerlegungspaar* für $\mathfrak{C} = [X, Y, Z, H]$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall x \forall N \forall M \forall z \forall z' (x \in X \wedge N \in \pi \wedge M \in \tau \wedge z, z' \in N \to$$
$$\to F[z, x](M) = F[z', x](M)) ;$$

b) π heißt *Automatenzerlegung* für $\mathfrak{C}$, wenn es eine Zerlegung τ gibt mit $\tau \leqq \pi$ und $[\pi, \tau]$ Zerlegungspaar ist[1]).

2.2. Das Existenzproblem

Die beiden hier angegebenen Sätze wurden 1964 von Bacon [1] bewiesen. Unter Berufung darauf, daß jeder S-Automat äquivalent zu einem stochastischen Moore-Automaten ist[2]), beschränkt er seine Betrachtungen auf S-Automaten des Moore-Typs. Allerdings führt die Konstruktion des zu einem S-Automaten $\mathfrak{C}$ äquivalenten Moore-Automaten $\mathfrak{C}'$ zu einer Vergrößerung der Zustandsmenge, so daß eine Dekomposition von $\mathfrak{C}'$ Komponenten besitzen kann, die „größer" als $\mathfrak{C}$ sind. Da wir aber jeden S-Automaten in der Weise von Abb. 1b darstellen können, ist es möglich, uns bei Dekompositionsproblemen auf die Untersuchung der entsprechenden Automaten ohne Ausgabe zu beschränken.

Satz 2.2 (Bacon [1]). *Es sei $\mathfrak{C} = [X, Y, Z', H']$ ein S-Automat mit endlicher Zustandsmenge und mindestens drei Zuständen. Es existiere eine in bezug auf $\mathfrak{C}$ unabhängige Menge $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ von Zerlegungen von Z' derart, daß für $1 \leqq i \leqq n$*

$$0 < \pi_i < 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n} \pi_i = 0$$

gilt. Dann und nur dann existieren Komponenten $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ und eine Z-isomorphe Dekomposition $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{C}$ mit den Komponenten $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$.

Beweis. (Man weist zunächst leicht nach, daß die genannte Bedingung notwendig ist. Dazu betrachtet man die Zerlegungen π_i von Z', die durch den Z-Isomorphismus ζ von dem Teilautomaten $\mathfrak{D}^* = [X, Y, Z^*, H^*]$ von $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{C}$ und die Zustandsmengen der Komponenten $\mathfrak{C}_i$ erzeugt werden. Die Zerlegung π_i ist definiert durch

$$\pi_i =_{\mathrm{Df}} \{\zeta(N(z_i)) | N(z_i) = \{z^* | z^* = [z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n] \in Z^*\} \wedge z_i \in Z_i\}.)$$

Wir beweisen durch Konstruktion des Netzes $\mathfrak{D}$, daß die Bedingung hinreichend ist. Die Überführungsfunktion F_i der Komponente

$$\mathfrak{C}_i =_{\mathrm{Df}} [X_i, \pi_i, F_i] \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

mit $X_i = X \times \pi_1 \times \cdots \times \widehat{\pi_i} \times \cdots \times \pi_n$ wird für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $N_i, N_i' \in \pi_i$, $x \in X$ festgelegt durch

$$F_i[N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n]](N_i') =$$
$$=_{\mathrm{Df}} \begin{cases} F'[\iota z (z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i), x](N_i'), & \text{falls} \quad \bigcap_{i=1}^{n} N_i \neq \emptyset, \\ \text{ein beliebiges diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß über } \pi_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. Beispiel 1, Seite 306.

[2]) Carlyle 1968 (unveröffentlicht 1961); Bucharajew 1963; Starke 1965.

Damit sind die $\mathfrak{C}_i$ S-Automaten mit $\mathrm{Card}(Z_i) = \mathrm{Card}(\pi_i) < \mathrm{Card}(Z')$. Laut Voraussetzung ist $\prod_{i=1}^{n} \pi_i = 0$, daher ist $\bigcap_{i=1}^{n} N_i$ (bei $N_i \in \pi_i$) entweder leer oder eine Einermenge. Die eineindeutige Abbildung ζ von

$$Z^* =_{\mathrm{Df}} \left\{[N_1, \ldots, N_n] / \bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \pi_i \wedge \bigcap_{i=1}^{n} N_i \neq \varnothing\right\}$$

auf Z' sei dann durch

$$\zeta([N_1, \ldots, N_n]) =_{\mathrm{Df}} \iota z \left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right)$$

festgelegt. Setzen wir für $[N_1, \ldots, N_n], [N'_1, \ldots, N'_n] \in Z^*$, $x \in X$

$$H^*[[N_1, \ldots, N_n], x](y, [N'_1, \ldots, N'_n]) =$$
$$=_{\mathrm{Df}} H'[\zeta([N_1, \ldots, N_n]), x](y, \zeta([N'_1, \ldots, N'_n])) ,$$

so wird das System

$$\mathfrak{D}^* = [X, Y, Z^*, H^*]$$

ein zu $\mathfrak{C}$ *Z-isomorpher* S-Automat. $\mathfrak{D}^*$ ist ein Teilautomat des Netzes $\mathfrak{D} = [X, Y, \bigtimes_{i=1}^{n} \pi_i, H]$ aus den Komponenten $\mathfrak{C}_i$, wobei für $z^* = [N_1, \ldots, N_n]$, $z^{**} = [N'_1, \ldots, N'_n] \in Z^*$, $y \in Y$ und $x \in X$ $H[z^*, x](y, z^{**}) =_{\mathrm{Df}} H^*[z^*, x](y, z^{**})$ und für $z^* \in Z^*$, $z^{**} \in Z \setminus Z^*$ $H[z^*, x](y, z^{**}) = 0$ gesetzt wird. Für $z^* \in Z \setminus Z^*$ wird H so gewählt, daß $F[z^*, x](z^{**}) = \prod_{i=1}^{n} F_i[N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n]](N'_i)$ ist.

Es ist nun noch die Verträglichkeit der Definition von H mit der des Netzes und der F_i nachzuweisen. Für $z^*, z^{**} \in Z^*$ gilt

$$\sum_{y \in Y} H[[N_1, \ldots, N_n], x](y, [N'_1, \ldots, N'_n]) =$$
$$= \sum_{y \in Y} H^*[[N_1, \ldots, N_n], x](y, [N'_1, \ldots, N'_n])$$
$$= \sum_{y \in Y} H'[\zeta([N_1, \ldots, N_n]), x](y, \zeta([N'_1, \ldots, N'_n]))$$
$$= F'[\zeta([N_1, \ldots, N_n], x]\left(\bigcap_{i=1}^{n} N'_i\right);$$

$\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ ist eine *unabhängige* Zerlegungsmenge, also können wir die Gleichungskette wie folgt fortsetzen:

$$= \prod_{i=1}^{n} F'[\zeta([N_1, \ldots, N_n]), x](N'_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} F_i[N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n]](N'_i) .$$

Offenbar sind für die übrigen Fälle die Definitionen ebenfalls verträglich. ∎

Satz 2.3 (Bacon [1]). *Es sei $\mathfrak{M} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ eine nichtleere Menge von Automatenzerlegungen für $\mathfrak{C} = [X, Y, Z', H']$ ($\mathrm{Card}(Z') \geqq 3$) mit $\prod_{i=1}^{n} \pi_i = 0$,*

$\pi_i \neq \pi_j$ *für* $i \neq j$ *und* $\pi_i < 1$ *für* $1 \leqq i \leqq n$. *Sei dann* $\mathfrak{M}_1 = \max(\mathfrak{M}) = \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ *und* $\mathfrak{M}_\varrho$ *die Menge aller Zerlegungen* π *aus* $\mathfrak{M}$ *mit* $\pi > \pi_\varrho$ *für* $\pi_\varrho \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$. *Es existiere ferner eine Menge* $\overline{\mathfrak{M}} = \{\tau_{s+1}, \ldots, \tau_\varrho, \ldots, \tau_n\}$ *von Zerlegungen von* Z' *mit den folgenden Eigenschaften:*

Für $s + 1 \leqq \varrho \leqq n$ *ist*

(1) $\pi_\varrho \leqq \tau_\varrho > 0$;

(2) $\prod_{\pi \in \mathfrak{M}_\varrho} \pi \cdot \tau_\varrho = \pi_\varrho$;

(3) $\mathfrak{M}_1 \cup \overline{\mathfrak{M}}$ *ist unabhängig in bezug auf* $\mathfrak{C}$.

Dann und nur dann besitzt $\mathfrak{C}$ *eine schleifenfreie und Z-isomorphe Dekomposition aus n Komponenten.*

Beweis. Wir beschränken uns wieder darauf, einen Beweis dafür anzugeben, daß die Bedingung *hinreichend* ist. — Zunächst sei $\overline{\mathfrak{M}}_\varrho$ die Menge aller τ_i aus $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\pi_i \in \mathfrak{M}_\varrho$. Ferner sei für $\pi_\varrho \in \mathfrak{M}$ $\pi_\varrho^* = \prod_{\pi \in \mathfrak{M}_\varrho} \pi$. Dann ist $\pi_\varrho^* \cdot \tau_\varrho = \pi_\varrho$, und daher sind $[\pi_\varrho^* \cdot \tau_\varrho, \pi_\varrho]$ sowie $[\pi_{\varrho i}^* \cdot \tau_\varrho, \tau_\varrho]$ Zerlegungspaare für $\mathfrak{C}$. Mit Hilfe von (2) verifiziert man nun leicht die Beziehung $\pi_\varrho^* = \prod_{\pi \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_\varrho} \pi \cdot \prod_{\pi \in \mathfrak{M}_\varrho \setminus \mathfrak{M}_1} \pi = \prod_{\pi \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_\varrho} \pi \cdot \prod_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_\varrho} \tau$.

Damit gilt:

$$\left[\prod_{\pi \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}} \pi \cdot \prod_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_\varrho} \tau \cdot \tau_\varrho, \tau_\varrho\right] \quad \textit{ist ein Zerlegungspaar}\,. \tag{*}$$

Die Komponenten der „ersten Ebene" $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_\varrho$ werden definiert wie folgt:

$$\mathfrak{C}_i =_{\mathrm{Df}} [X, \pi_i, F_i]$$

mit $F_i[N_i, x](N_i') = F'[\varepsilon z (z \in N_i), x](N_i')$. Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl von z, da $[\pi_i, \pi_i]$ ein Zerlegungspaar ist. Die weiteren Komponenten $\mathfrak{C}_\varrho$ $(s + 1 \leqq \varrho \leqq n)$ werden wie folgt definiert:

$$\mathfrak{C}_\varrho = \left[X \times \bigtimes_{\pi_i \in \mathfrak{M}_\varrho \cap \mathfrak{M}_1} \pi_i \times \bigtimes_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}_\varrho} \tau, \tau_\varrho, F_\varrho\right]$$

mit $F_\varrho[N_i, [x, N_{\varrho_1}, \ldots, N_{\varrho m}]](N_i') = F'\left[\varepsilon z \left(z \in N_i \cap \bigcap_{i=1}^{m} N_{\varrho i}\right), x\right](N_i')$, falls $N_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} N_{\varrho i}$ nicht leer ist, und ein beliebiges, diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß über τ_ϱ, sonst.

Diese Definition ist wegen (*) unabhängig von der speziellen Wahl von z. Die Komponenten $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s$ hängen offenbar nur von ihrem eigenen Zustand und vom externen Eingabesignal ab. Jede andere Komponente hängt außerdem von Komponenten ab, die als Zustandsmenge Zerlegungen aus $(\mathfrak{M}_\varrho \cap \mathfrak{M}_1) \cup \overline{\mathfrak{M}}_\varrho$ besitzen. Das durch obige Definitionen festgelegte Netz ist also schleifenfrei. Die übrigen Beweisschritte verlaufen wie im Satz 2.2. ▮

Bemerkung. An die Menge $\mathfrak{M}$ kann noch eine Forderung gestellt werden, die ein minimales, nichtredundantes Netz gewährleistet (vgl. dazu HARTMANIS/STEARNS [3], S. 100).

3. Homomorphe Dekomposition Z-endlicher stochastischer Automaten

Die Bedingungen für die Existenz einer isomorphen Dekomposition für einen S-Automaten sind sehr einschränkend, d. h., für einen vorgegebenen S-Automaten ist es „sehr unwahrscheinlich“, daß er sie erfüllt. Wir werden in diesem Abschnitt einen Satz beweisen, der garantiert, daß zu jedem Z-endlichen S-Automaten eine *homomorphe* Dekomposition existiert:

Satz 3.1. *Jeder Z-endliche S-Automat $\mathfrak{C} = [X, Y, Z', H']$ mit* Card $(Z') \geqq 3$ *besitzt eine homomorphe Dekomposition.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $Z' = \{1, 2, \ldots, n\}$. Es seien r und s natürliche Zahlen mit $s + r \geqq n + 1$ und $n > r \geqq 2$, $n > s \geqq 2$. Dann ist $r \cdot s > n$. Wir konstruieren zunächst die Komponenten $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$:

$$\mathfrak{C}_1 = [X \times Z_2, Z_1, F_1]\,,$$
$$\mathfrak{C}_2 = [X \times Z_1, Z_2, F_2]$$

mit $Z_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$ und $Z_2 = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Die eindeutige Abbildung ζ von $Z_1 \times Z_2$ auf Z' definieren wir für $[a_\varrho, b_\sigma] \in Z_1 \times Z_2$ durch

$$\zeta([a_\varrho, b_\sigma]) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \varrho\,, & \text{falls } 1 \leqq \varrho \leqq r - 1\,, \\ r + \sigma - 1\,, & \text{falls } \varrho = r \wedge \sigma \leqq n + 1 - r\,, \\ n & \text{sonst}\,.^{1)} \end{cases}$$

Wir legen nun die Überführungsfunktionen F_1 und F_2 fest:

$$F_1[a_\varrho, [x, b_\sigma]]\,(a_{\varrho'}) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} F'[\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x]\,(\{r, \ldots, n\})\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } \varrho' = r\,, \\ F'[\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x]\,(\varrho') \quad \text{sonst}\,; \end{cases}$$

$$F_2[b_\sigma, [x, a_\varrho]]\,(b_{\sigma'}) =$$
$$=_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \dfrac{F'[\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x]\,(r + \sigma' - 1)}{F'[\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x]\,(\{r, \ldots, n\})}\,, \quad \text{falls} \\ 1 \leqq \sigma' \leqq n + 1 - r \wedge F'[\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x]\,(\{r, \ldots, n\}) \neq 0\,, \\ 1\,, \qquad \text{falls } \sigma' = 1 \wedge F'[\varrho([a_\varrho, b_\sigma]), x]\,(\{r, \ldots, n\}) = 0\,, \\ 0 \qquad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Damit sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ S-Automaten. Wir setzen $\mathfrak{D} =_{\mathrm{Df}} [X, Y, Z_1 \times Z_2, H]$ mit $F[[a_\varrho, b_\sigma], x]\;([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]) =_{\mathrm{Df}} F_1[a_\varrho, [x, b_\sigma]]\;(a_{\varrho'}) \cdot F_2[b_\sigma, [x, a_\varrho]]\;(b_{\sigma'})$. Wir haben zu zeigen, daß ζ ein Z-Homomorphismus von dem S-Automaten (ohne

---

1) Z_1, Z_2 und ζ definieren zwei Überdeckungen von Z', $\Phi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{r-1\}, \{r, \ldots, n\}\}$ und $\Phi_2 = \{\{1, 2, \ldots, r-1, r\}, \{1, 2, \ldots, r-1, r+1\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, r-1, n\}\}$, deren Produkt 0 ist. Durch „state splitting“, d. h. durch eine Mehrfachindizierung (vgl. [3], S. 119ff.), erhält man bei entsprechender Festlegung der Überführungsfunktion einen S-Automaten, der die Bedingung von Satz 2.2 erfüllt und Z-homomorph auf den ursprünglichen S-Automaten abbildbar ist. (Jedes Netz erfüllt diese Bedingungen trivialerweise.)

Ausgabe) $[X, Z_1 \times Z_2, F]$ auf den S-Automaten (ohne Ausgabe) $[X, Z', F']$ ist. Es muß gelten:

$$F'[\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x](\nu) = \sum_{[a_{\varrho'}, b_{\sigma'}] \in \zeta^{-1}(\nu)} F_1[a_\varrho, [x, b_\sigma]](a_{\varrho'}) \cdot F_2[b_\sigma, [x, a_\varrho]](b_{\sigma'}).$$

Der Beweis dieser Beziehung erfolgt unter Benutzung der Definitionen von F_1 und F_2. Wir definieren nun H für $F[[a_\varrho, b_\sigma], x]([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]) \neq 0$ durch

$$H[[a_\varrho, b_\sigma], x](y, [a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]) =$$
$$=_{\mathrm{Df}} F[[a_\varrho, b_\sigma], x]([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]) \frac{H'[\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x](y, \zeta([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}])}{F[[a_\varrho, b_\sigma], x](\zeta^{-1} \cdot \zeta([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]))}.$$

ζ wird dadurch ein Z-Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{C}$. ▮

Korollar 3.2. *Jeder Z-endliche S-Automat $\mathfrak{C}$ besitzt eine Dekomposition aus höchstens $n-1$ Komponenten mit jeweils zwei Zuständen.*

Beweis. Das Netz $\mathfrak{D}$ wird in $n-2$ Schritten mit Hilfe von Satz 3.1 konstruiert, wobei s stets gleich 2 gesetzt wird. $\mathfrak{D}$ besitzt $n-1$ bistabile Komponenten. ▮

4. Beispiele

Beispiel 1. Es sei gegeben der S-Automat $\mathfrak{C} = [\{0, 1\}, Y, \{a, b, c, d\}, H]$ mit der Überführungsfunktion F:

0	a	b	c	d	1	a	b	c	d
a	30	30	20	20	a	12	8	48	32
b	42	18	28	12	b	8	12	32	48
c	3	27	7	63	c	18	72	2	8
d	24	6	56	14	d	45	45	5	5

(in Prozent)

Die beiden Zerlegungen $\pi_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ und $\pi_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\} = 0$ sind Automatenzerlegungen von $\mathfrak{C}$ mit $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$. Für die Zerlegung $\tau_2 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ gilt:

$$0 < \tau_2 > \pi_2 \quad \text{und} \quad \pi_1 \cdot \tau_2 = \pi_2 = 0 .$$

Dabei ist $\{\pi_1, \tau_2\}$ unabhängig in bezug auf $\mathfrak{C}$.

Es sind also die Voraussetzungen für die Existenz einer schleifenfreien Dekomposition (Satz 2.3) erfüllt. Die Komponenten $\mathfrak{C}_1 = [\{0, 1\}, \pi_1, F_1]$ und $\mathfrak{C}_2 = [\{0, 1\} \times \pi_1, \tau_2, F_2]$ besitzen die Überführungsfunktionen F_1:

0	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	1	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$
$\{a, b\}$	60	40	$\{a, b\}$	20	80
$\{c, d\}$	30	70	$\{c, d\}$	90	10

und F_2:

$[0, \{a, b\}]$	$\{a, c\}$	$\{b, d\}$	$[1, \{a, b\}]$	$\{a, c\}$	$\{b, d\}$
$\{a, c\}$	50	50	$\{a, c\}$	60	40
$\{b, d\}$	70	30	$\{b, d\}$	40	60
$[0, \{c, d\}]$			$[1, \{c, d\}]$		
$\{a, c\}$	10	90	$\{a, c\}$	20	80
$\{b, d\}$	80	20	$\{b, d\}$	50	50

(in Prozent)

Beispiel 2. Man dekompiere den S-Automaten $\mathfrak{C} = [\{0, \ldots, n\}, Y, \{1, 2, 3, 4\}, H]$ mit $n \geqq 0$ und F:

0	1	2	3	4	
1	0,2	0,1	0,6	0,1	....
2	0,2	0,6	0,2	0	
3	0,3	0,5	0,1	0,1	
4	0,1	0,3	0,4	0,2	

Die Voraussetzungen für die Existenz einer isomorphen Dekomposition sind nicht gegeben (Satz 2.2), wir konstruieren eine homomorphe Dekomposition nach Satz 3.1. Wegen Card $(Z') = 4$ wählen wir $r = 3$ und $s = 2$. Also ist $\mathfrak{C}_1 = [\{0, \ldots, n\} \times \{b_1, b_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, F_1]$ und $\mathfrak{C}_1 = [\{0, \ldots, n\} \times \{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2\}, F_2]$. Die folgende Tabelle gibt den Z-Homomorphismus von $\{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2\}$ auf $\{1, 2, 3, 4\}$ an:

$[a_\varrho, b_\sigma]$	$[a_1, b_1]$	$[a_1, b_2]$	$[a_2, b_1]$	$[a_2, b_2]$	$[a_3, b_1]$	$[a_3, b_2]$
$\zeta([a_\varrho, b_\sigma])$	1	1	2	2	3	4

Damit sind die beiden Überführungsfunktionen F_1 und F_2 festgelegt:

F_1:	$[0, b_1]$	a_1	a_2	a_3	$[0, b_2]$	a_1	a_2	a_3	
	a_1	0,2	0,1	0,7	a_1	0,2	0,1	0,7	.....
	a_2	0,2	0,6	0,2	a_2	0,2	0,6	0,2	
	a_3	0,3	0,5	0,2	a_3	0,1	0,3	0,6	

F_2:	$[0, a_1]$	b_1	b_2	$[0, a_2]$	b_1	b_2	$[0, a_3]$	b_1	b_2	
	b_1	6/7	1/7	b_1	1	0	b_1	1/2	1/2	.....
	b_2	6/7	1/7	b_1	1	0	b_2	2/3	1/3	

Daraus ergibt sich die Überführungsfunktion F^* des Netzes durch:

F^*: 0	$[a_1, b_1]$	$[a_1, b_2]$	$[a_2, b_1]$	$[a_2, b_2]$	$[a_3, b_1]$	$[a_3, b_2]$
$[a_1, b_1]$	$\frac{0{,}2 \cdot 6}{7}$	$\frac{0{,}2 \cdot 1}{7}$	$\frac{0{,}1 \cdot 6}{7}$	$\frac{0{,}1 \cdot 1}{7}$	$\frac{0{,}7 \cdot 6}{7}$	$\frac{0{,}7 \cdot 1}{7}$
$[a_1, b_2]$	$\frac{0{,}2 \cdot 6}{7}$	$\frac{0{,}2 \cdot 1}{7}$	$\frac{0{,}1 \cdot 6}{7}$	$\frac{0{,}1 \cdot 1}{7}$	$\frac{0{,}7 \cdot 6}{7}$	$\frac{0{,}7 \cdot 1}{7}$
$[a_2, b_1]$	0,2	0	0,6	0	0,2	0
$[a_2, b_2]$	0,2	0	0,6	0	0,2	0
$[a_3, b_1]$	$\frac{0{,}3 \cdot 1}{2}$	$\frac{0{,}3 \cdot 1}{2}$	$\frac{0{,}5 \cdot 1}{2}$	$\frac{0{,}5 \cdot 1}{2}$	$\frac{0{,}2 \cdot 1}{2}$	$\frac{0{,}2 \cdot 1}{2}$
$[a_3, b_2]$	$\frac{0{,}1 \cdot 2}{3}$	$\frac{0{,}1 \cdot 1}{3}$	$\frac{0{,}3 \cdot 2}{3}$	$\frac{0{,}3 \cdot 1}{3}$	$\frac{0{,}6 \cdot 2}{3}$	$\frac{0{,}6 \cdot 1}{3}$

Das Netz $\mathfrak{D} = [\{0, \ldots, n\}, Y, \{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2\}, H^*]$ ist eine homomorphe Dekomposition von $\mathfrak{C}$, wenn noch H^* entsprechend definiert wird (vgl. Seite 306).

5. Nicht-deterministische Automaten. Vorbereitungen

Wie in Abschnitt 1 definieren wir zunächst einige Grundbegriffe (vgl. [6]).

Definition 5.1. Das Quadrupel $\mathfrak{B} = [X, Y, Z, h]$ heißt *nicht-deterministischer Automat* (kurz: *NDA*), falls

a) X, Y, Z nichtleere Mengen sind und

b) h eine eindeutige Abbildung von $Z \times X$ in $\mathfrak{P}(Y \times Z) \setminus \{\emptyset\}$ ist.

Dabei werden die Mengen X, Y bzw. Z als die Mengen der Eingabe- bzw. Ausgabesignale und der Zustände interpretiert. Befindet sich $\mathfrak{B}$ im Takt t im Zustand z und empfängt das Eingabesignal x, so ist das Paar $[y, z']$ genau dann ein Element aus $h(z, x)$, wenn der Folgezustand z' und das Ausgabesignal y sein kann. (Bei einem NDA liegen also nur die *Möglichkeiten* seiner Reaktion in einer bestimmten Situation $[z, x]$ fest, während bei einem S-Automaten eine statistische Voraussage möglich ist.)

Die *Überführungsfunktion* f von $\mathfrak{B}$ ist definiert durch

$$f(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{z' \mid \exists\, y([y, z'] \in h(z, x))\}$$

und gibt alle die Zustände z' an, in die $\mathfrak{B}$ in der Situation $[z, x]$ übergehen kann. Die Funktion g, festgelegt durch

$$g(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{y \mid \exists\, z' ([y, z'] \in h(z, x))\},$$

heißt *Ergebnisfunktion* von $\mathfrak{B}$ und bezeichnet die Menge aller möglichen Ausgabesignale y in der Situation $[z, x]$. Ferner sind durch

$$h_y(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{z' \mid [y, z'] \in h(z, x)\}$$

bzw.

$$h_z(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{y \mid [y, z'] \in h(z, x)\}$$

die *bedingte Überführungs-* bzw. *bedingte Ergebnisfunktion* von $\mathfrak{B}$ festgelegt. $h_y(z, x)$ bzw. $h_{z'}(z, x)$ können leere Mengen sein.

$\mathfrak{B}$ heißt *Z-endlich*, wenn Z endlich ist.

$\mathfrak{B} = [X, Y, Z, h]$ mit Card $(Z) \geqq 2$ heißt nicht-deterministische *Komponente*, wenn $Y = Z$ ist und für alle z und x gilt: $y \in g(z, x) \to y = z$. Wir notieren $\mathfrak{B}$ dann durch $[X, Z, f]$.

Definition 5.2. Es seien $\mathfrak{B} = [X, Y, Z, h]$ und $\mathfrak{B}' = [X', Y', Z', h']$ beliebige NDA. Das Tripel $[\xi, \eta, \zeta]$ heißt *Homomorphismus* von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ genau dann, wenn (1) ξ bzw. η bzw. ζ eindeutige Abbildungen von X bzw. Y bzw. Z auf X' bzw. Y' bzw. Z' sind und (2) für alle $z', z'' \in Z'$, $x' \in X$, $y' \in Y$ mit $[y', z''] \in h'(z', x')$ gibt es ein $z^* \in \zeta^{-1}(z'')$ und ein $y \in \eta^{-1}(y')$ derart, daß $[y, z^*] \in h(z, x)$ für alle $z \in \zeta^{-1}(z')$, $x \in \xi^{-1}(x')$ ist. Im Falle eineindeutiger Abbildungen sprechen wir von einem *Isomorphismus* ;sind ξ und η die identischen Abbildungen, so heißt ζ ein *Z-Homomorphismus*.

Definition 5.3. Der Z-endliche NDA $\mathfrak{B} = [X, Y, Z, h]$ heißt *Netz* aus den Komponenten $\mathfrak{B}_1 = [X_1, Z_1, f_1], \ldots, \mathfrak{B}_n = [X_n, Z_n, f_n]$, wenn gilt

E R R A T A

EIK 7 (1971) 5/6, 297–316

S. 308, 7. Zeile von unten, lies:

... (2) $\eta \times \zeta\,(h(z,x)) = h'(\,\zeta(z),\ \xi(x)\,)$ ist, wobei $z \in Z, x \in X$ ist und $\eta \times \zeta([y,z]) =_{Df.} [\eta(y), \zeta(z)]$ sowie $\eta\times\zeta(h(z,x)) =_{Df.} \bigcup_{[y',z'] \in h(z,x)} \eta \times \zeta([y',z'])$ gesetzt wird. Im Falle ...

S. 309, Definitionsausdruck 6.1.: $\forall N_1 \ldots \forall N_n (\bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \Pi_i \longrightarrow$

$$\bigvee_{i=1}^{n} (N_i \cap f(z,x) \neq \emptyset) \longleftrightarrow \emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} N_i \cap f(z,x)\ ).$$

1) $Z = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} Z_i$,

2) $X_i = Z_1 \times \cdots \times \widehat{Z_i \times} \cdots \times Z_n$,

3) $f([z_1, \ldots, z_n], x) = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} f_i(z_i, [x, z_1, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_n])$.

$\mathfrak{B}$ heißt *schleifenfrei*, falls die Überführungsfunktion f_i für $i > 1$ höchstens von den Komponenten $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{i-1}$ abhängt.

Definition 5.4. Das (schleifenfreie) Netz $\mathfrak{D}$ heißt (*schleifenfreie*) *homomorphe Dekomposition* des NDA $\mathfrak{B}$, falls $\mathfrak{B}$ Z-homomorphes Bild eines Teilautomaten von $\mathfrak{D}$ ist und in $\mathfrak{D}$ keine Komponente vorkommt, die nicht weniger Zustände als $\mathfrak{B}$ besitzt.

6. Die isomorphe Dekomposition Z-endlicher nicht-deterministischer Automaten

6.1. Zerlegungen der Zustandsmenge eines nicht-deterministischen Automaten

Es sei $\mathfrak{B} = [X, Y, Z, h]$ ein beliebiger Z-endlicher NDA.

Definition 6.1. Die Menge $\mathfrak{M} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ von Zerlegungen von Z heißt *unabhängig* in bezug auf $\mathfrak{B}$, wenn für alle $x \in X$, $z \in Z$ gilt:

$$\forall j\, \forall N_1 \ldots \forall N_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \pi_i \wedge j \in \{1, \ldots, n\} \right.$$

$$\left. \rightarrow N_j \cap f(z, x) \neq \emptyset \leftrightarrow \emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} N_i \cap f(z, x) \right) ^{1)} .$$

Definition 6.2. 1. Das Paar $[\pi, \tau]$ von Zerlegungen von Z heißt *Zerlegungspaar* für $\mathfrak{B}$, falls für alle $N \in \pi$, $M \in \tau$, $x \in X$ und $z, z' \in N$ gilt

$$M \cap f(z, x) \neq \emptyset \leftrightarrow M \cap f(z', x) \neq \emptyset .$$

2. π heißt *Automatenzerlegung* für $\mathfrak{B}$, wenn es eine Zerlegung τ von Z mit $\pi \geqq \tau$ gibt, so daß $[\pi, \tau]$ ein Zerlegungspaar ist.[1]

6.2. Das Existenzproblem

Satz 6.1. *Es sei* $\mathfrak{B} = [X, Y, Z', h']$ *ein* Z-*endlicher NDA mit* Card $(Z') > 2$ *und es existiere eine in bezug auf* $\mathfrak{B}$ *unabhängige Menge* $\mathfrak{M} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ *von Zerlegungen von* Z' *derart, daß für* $1 \leqq i \leqq n$ *gilt:*

$$0 < \pi_i < 1 \qquad \textit{und} \qquad \prod_{i=1}^{n} \pi_i = 0 .$$

Dann und nur dann besitzt $\mathfrak{B}$ *eine isomorphe Dekomposition aus n Komponenten.*

---

[1]) Vgl. Beispiel 3, Seite 312.

Beweis. Wir zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist. — Die Komponenten $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ mit

$$\mathfrak{B}_i =_{\mathrm{Df}} [X_i, Z_i, f_i],$$

$$X_i = X \times \pi_1 \times \cdots \times \widehat{\pi_i} \times \cdots \times \pi_n \quad \text{und} \quad Z_i = \pi_i$$

besitzen die Überführungsfunktionen f_i, die folgendermaßen festgelegt sind: Für $N_i \in \pi_i$ und $x \in X$ sei

$$f_i(N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n]) =_{\mathrm{Df}}$$

$$=_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \left\{N_i' \mid N_i' \in \pi_i \wedge f\left(\iota\, z\left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right), x\right) \cap N_i' \neq \varnothing\right\}, \\ \qquad \text{falls } \bigcap_{i=1}^{n} N_i \neq \varnothing; \\ \text{eine beliebige, nichtleere Teilmenge von } \pi_i \\ \qquad \text{sonst.} \end{cases}$$

Die $\mathfrak{B}_i$ sind damit NDA.

Wir definieren wieder eine eineindeutige Abbildung ζ von $Z^* = \left\{[N_1, \ldots, N_n] \mid \bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \pi_i \wedge \bigcap_{i=1}^{n} N_i \neq \varnothing\right\}$ auf Z' durch $\zeta([N_1, \ldots, N_n]) =_{\mathrm{Df}} \iota\, z\left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right)$.

Mit der nachfolgenden Definition von h^* wird das System $\mathfrak{D}^* = [X, Y, Z^*, h^*]$ ein NDA und ζ ein Z-Isomorphismus von $\mathfrak{D}^*$ auf $\mathfrak{B}$:

Für $z^*, z^{**} \in Z^*$, $x \in X$ und $y \in Y$ ist

$$[z^{**}, y] \in h^*(z^*, x) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} [\zeta(z^{**}), y] \in h'(\zeta(z^*), x)\,.$$

Daraus folgt sofort die Beziehung $z^{**} \in h_y^*(z^*, x) \leftrightarrow \zeta(z^{**}) \in h_y'(\zeta(z^*), x)$. $\mathfrak{D}^*$ ist ein Teilautomat des Netzes $\mathfrak{D} = [X, Y, Z, h]$ aus den $\mathfrak{B}_i$ mit $Z = \times_{i=1}^{n} \pi_i$ und $[z^{**}, y] \in h(z^*, x) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} [z^{**}, y] \in h^*(z^*, x)$ für $z^* \in Z^*$, $x \in X$ und $y \in Y$. Ist $z^* = [N_1, \ldots, N_n] \in \times_{i=1}^{n} \pi_i \setminus Z^*$, so setzen wir

$$[z^{**}, y] \in h(z^*, x) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} z^{**} \in \times_{i=1}^{n} f_i(N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n]) \wedge y \in Y.$$

Damit ist die Gleichung

$$f(z^*, x) = \bigcup_{y \in Y} h_y(z^*, x) = \times_{i=1}^{n} f_i(N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n])$$

erfüllt. Die Gültigkeit dieser Gleichung muß noch für $z^* \in Z^*$ nachgewiesen werden, damit die Definition des Netzes und die der Funktionen f_i und h verträglich sind. Es ist

$$[N_1', \ldots, N_n'] \in \times_{i=1}^{n} f_i(N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n]) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [N_1', \ldots, N_n'] \in \times_{i=1}^{n} \left\{N_i'' \mid N_i'' \in \pi_i \wedge N_i'' \cap f'\left(\iota z\left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right), x\right) \neq \varnothing\right\}.$$

Aus der Unabhängigkeit von $\mathfrak{M}$ folgt weiter

$$\leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} N_i' \in \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} N_i'' \mid \bigwedge_{i=1}^{n} N_i'' \in \pi_i \wedge \emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} N_i'' \cap f'\left(\iota z\left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right), x\right)\right\}$$

$$\leftrightarrow \zeta([N_1', \ldots, N_n']) \in \left\{\zeta([N_1'', \ldots, N_n'']) \mid [N_1'', \ldots, N_n''] \in Z^* \wedge \right.$$

$$\left. \wedge\, \zeta([N_1'', \ldots, N_n'']) \in f'\left(\iota z\left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right), x\right)\right\} =$$

$$= \{z' \mid z' \in Z' \wedge z' \in f'(\zeta(z^*), x)\}$$

$$= f'(\zeta(z^*), x) = \bigcup_{y \in Y} h_y'(\zeta(z^*), x)$$

$$\leftrightarrow [N_1', \ldots, N_n'] \in \bigcup_{y \in Y} h_y^*(z^*, x) = \bigcup_{y \in Y} h_y(z^*, x)\,.$$

Folglich ist der NDA $\mathfrak{D} = [X, Y, Z, h]$ eine isomorphe Dekomposition von $\mathfrak{B}$. ∎

Satz 6.2. *Es sei $\mathfrak{B} = [X, Y, Z', h']$ ein Z-endlicher NDA mit* Card $(Z') > 2$. *Es existiere eine Menge $\mathfrak{M} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ von Automatenzerlegungen für $\mathfrak{B}$ derart, daß für $1 \leq i \leq n$ gilt: $\pi_i < 1$ und $\prod_{i=1} \pi_i = 0$.*

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_1$ die Menge aller in bezug auf $\leq$ maximalen Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_r$ von $\mathfrak{M}$ und mit $\mathfrak{M}_\varrho$ die Menge aller Elemente π aus $\mathfrak{M}$ mit $\pi > \pi_\varrho$ für $\pi_\varrho \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$. Es existiere ferner eine Menge $\overline{\mathfrak{M}} = \{\tau_{r+1}, \ldots, \tau_n\}$ von Zerlegungen von Z' derart, daß für $r + 1 \leq \varrho \leq n$ gilt:

(1) $\pi_\varrho \leq \tau_\varrho > 0$;

(2) $\prod_{\pi \in \mathfrak{M}_\varrho} \pi \cdot \tau_\varrho = \pi_\varrho$;

(3) $\mathfrak{M}_1 \cup \overline{\mathfrak{M}}$ *ist in bezug auf $\mathfrak{B}$ unabhängig.*

Dann und nur dann besitzt $\mathfrak{B}$ eine isomorphe schleifenfreie Dekomposition aus n Komponenten.[1])

Beweis. Der Beweis erfolgt völlig analog zum Beweis von Satz 2.3 unter Beachtung der Konstruktion des Satzes 6.1. ∎

Bemerkung. Ist $\mathfrak{B}$ ein determinierter NDA und $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ eine Menge von Automatenzerlegungen mit den im Satz 6.2 angegebenen Eigenschaften, so existiert immer eine Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ von Zerlegungen, die die Forderungen aus diesem Satz erfüllt.

7. Homomorphe Dekomposition Z-endlicher nicht-deterministischer Automaten

Satz 7.1. *Jeder Z-endliche NDA $\mathfrak{B} = [X, Y, Z', h']$ besitzt eine Dekomposition.*[2])

Der Beweis erfolgt durch eine Konstruktion, die analog zu dem in Satz 3.1 angegebenen Verfahren verläuft. — Es sei $Z' = \{1, 2, \ldots, n\}$, und es seien r, s natürliche Zahlen mit (1) $s + r \geq n + 1$; (2) $n > r, s > 1$. Wir konstruieren

[1]) Vgl. Beispiel 3
[2]) Vgl. Beispiel 4

die Komponenten $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$:

$$\mathfrak{B}_1 =_{\mathrm{Df}} [X \times Z_2, Z_1, f_1] ,$$
$$\mathfrak{B}_2 =_{\mathrm{Df}} [X \times Z_1, Z_2, f_2] .$$

Dabei wird $Z_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $Z_2 = \{b_1, \ldots, b_s\}$ gesetzt. Ist ζ die eindeutige Abbildung von $Z_1 \times Z_2$ auf Z' mit

$$\zeta([a_\varrho, b_\sigma]) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \varrho, & \text{falls } \varrho < r , \\ r + \sigma - 1 , & \text{falls } \varrho = r \wedge 1 \leqq \sigma \leqq n - r + 1 , \\ n & \text{sonst} , \end{cases}$$

so definieren wir für $[a_\varrho, b_\sigma] \in Z_1 \times Z_2$:

$$a_{\varrho'} \in f_1(a_\varrho, [x, b_\sigma]) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \varrho' \in f'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x) \wedge \varrho' < r;$$

$$a_r \in f_1(a_\varrho, [x, b_\sigma]) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \bigvee_{\nu=0}^{n-r} r + \nu \in f'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x);$$

$$b_1 \in f_2(b_\sigma, [x, a_\sigma]) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \varrho' \in f'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x) \wedge \varrho' \leqq r;$$

s. korr. $\longrightarrow$ $$b_{1+\nu} \in f_2(b_\sigma, [x, a_\varrho]) \leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \nu \in \{1, 2, \ldots, n - r\} \wedge r + \nu \in f'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x) .$$

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind ND-Komponenten. Wir setzen weiter $\mathfrak{D} = [X, Y, Z_1 \times Z_2, h]$ mit

$$h([a_\varrho, b_\sigma], x) =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{[a_{\varrho'}, b_{\sigma'}] \in f([a_\varrho, b_\sigma], x)} \{[a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]\} \times h'_{\zeta([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}])}(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x) .$$

Wir zeigen, daß ζ ein Z-Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{B}$ ist, d. h., daß für alle x gilt:

$$\forall z' \, \forall y \, \forall \varrho \, \forall \sigma \, \exists \varrho' \, \exists \sigma' \, (1 \leqq (\varrho, \varrho') \leqq r \wedge$$
$$\wedge\, 1 \leqq (\sigma, \sigma') \leqq s \wedge z' = \zeta([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]) \wedge$$
$$\wedge\, [y, z'] \in h'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x) \wedge$$
$$\wedge\, [y, [a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]] \in h([a_\varrho, b_\sigma], x)) .$$

Wegen $h_{[a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]}([a_\varrho, b_\sigma], x) =_{\mathrm{Df}} h'_{\zeta([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}])}(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x)$ genügt es zu zeigen:

$$\forall z' \, \forall \varrho \, \forall \sigma \, \exists \varrho' \, \exists \sigma' \, (z' = \zeta([a_{\varrho'}, b_{\sigma'}]) \wedge [a_{\varrho'}, b_{\sigma'}] \in f([a_\varrho, b_\sigma], x) \wedge$$
$$\wedge\, z' \in f'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x)) .$$

Aufgrund der Definitionen der f_i (Fallunterscheidung) läßt sich diese Beziehung leicht nachweisen. ∎

Korollar 7.2. *Jeder Z-endliche NDA besitzt eine homomorphe Dekomposition in bistabile Komponenten.*

Der Beweis erfolgt wie bei Korollar 3.2. ∎

8. Beispiele

Beispiel 3. Es sei gegeben der NDA $\mathfrak{B} = [\{0, 1\}, Y, \{a, b, c\}, h']$ mit

f'	0	1
a	$\{b\}$	$\{c\}$
b	$\{a, b\}$	$\{c\}$
c	$\{c\}$	$\{a\}$

Berichtigung

Die Definition von f_2 muß richtig lauten:

$$b_\nu \in f_2(b_\sigma, [x, a_\varrho]) \xleftrightarrow[\text{Df.}]{} r+\nu-1 \in f'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x) \vee$$

$$\vee \{r, r+1, \ldots, n\} \cap f'(\zeta([a_\varrho, b_\sigma]), x) = \emptyset)$$

Offensichtlich ist die Zerlegung $\pi_1 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$ eine Automatenzerlegung und $\{\pi_1, 0\}$ erfüllt mit $\tau_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ die Voraussetzungen des Satzes 6.2. Wir setzen $\mathfrak{B}_1 = [\{0, 1\}, \pi_1, f_1]$ mit

f_1	0	1
$\{a, b\}$	$\{\{a, b\}\}$	$\{\{c\}\}$
$\{c\}$	$\{\{c\}\}$	$\{\{a, b\}\}$

und $\mathfrak{B}_2 = [\{0, 1\} \times \pi_1, \tau_2, f_2]$ mit

f_2	$[0, \{a, b\}]$	$[0, \{c\}]$	$[1, \}a, b\}]$	$[1, \{c\}]$
$\{a\}$	$\{\{b, c\}\}$	$\{\{a\}, \{b, c\}\}$ (bel.)	$\{\{b, c\}\}$	$\{\{a\}, \{b, c\}\}$ (bel.)
$\{b, c\}$	$\{\{a\}, \{b, c\}\}$	$\{\{b, c\}\}$	$\{\{b, c\}\}$	$\{\{a\}\}$

Dann ist $\mathfrak{D}^* = [\{0, 1\}, Y, \{[\{a, b\}, \{a\}], [\{a, b\}, \{b, c\}], [\{c\}, \{b, c\}]\}, h^*]$ mit

h^*	0	1
$[\{a, b\}, \{a\}]$	$\{[\{a, b\}, \{b, c\}]\}$	$\{[\{c\}, \{b, c\}]\}$
$[\{a, b\}, \{b, c\}]$	$\{[\{a, b\}, \{a\}], [\{a, b\}], \{b, c\}]\}$	$\{[\{c\}, \{b, c\}]\}$
$[\{c\}, \{b, c\}]$	$\{[\{c\}, \{b, c\}]\}$	$\{[\{a, b\}, \{a\}]\}$

ein Teilautomat des Netzes $\mathfrak{D} = [\{0, 1\}, Y, \pi_1 \times \tau_2, h]$, wobei gilt:

h	0	1
$[\{a, b\}, \{a\}]$	$\{[\{a, b\}, \{b, c\}]\}$	$\{[\{c\}, \{b, c\}]\}$
$[\{a, b\}, \{b, c\}]$	$\{[\{a, b\}, \{a\}], [\{a, b\}, \{b, c\}]\}$	$\{[\{c\}, \{b, c\}]\}$
$[\{c\}, \{a\}]$	$\{[\{c\}, \{a\}], [\{c\}, \{b, c\}]\}$	$\{[\{a, b\}, \{a\}], [\{a, b\}, \{b, c\}]\}$
$[\{c\}, \{b, c\}]$	$\{[\{c\}, \{b, c\}]\}$	$\{[\{a, b\}, \{a\}]\}$

$\mathfrak{B}_1$ ist sogar ein determinierter NDA.

Beispiel 4. $\mathfrak{B} = [\{0, \ldots, n\}, Y, \{1, 2, 3\}, h']$ sei ein NDA mit $n \geqq 0$ und

f'	0	1
1	$\{1, 2\}$	
2	$\{3\}$	...
3	$\{1, 2, 3\}$	

Wir setzen $\mathfrak{B}_1 = [\{0, \ldots, n\} \times \{b_1, b_2\}, \{a_1, a_2\}, f_1]$, $\mathfrak{B}_2 = [\{0, \ldots, n) \times \times \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, f_2]$ und ζ:

$[a_\varrho, b_\sigma]$	$[a_1, b_1]$	$[a_1, b_2]$	$[a_2, b_1]$	$[a_2, b_2]$
$\zeta([a_\varrho, b_\sigma])$	1	1	2	3

Damit sind f_1 und f_2 festgelegt:

f_1	$[0, b_1]$	$[0, b_2]$	$[1, b_1]$
a_1	$\{a_1, a_2\}$	$\{a_1, a_2\}$	$\dots$
a_2	$\{a_2\}$	$\{a_1, a_2\}$	$\dots$

f_2	$[0, a_1]$	$[0, a_2]$	$[1, a_1]$
b_1	$\{b_1\}$	$\{b_2\}$	$\dots$
b_2	$\{b_1\}$	$\{b_1, b_2\}$	$\dots$

Daraus ergibt sich das Netz $\mathfrak{D} = [\{0, \dots, n\},\ Y,\ \{a_1, b_2\} \times \{b_1, b_2\},\ h]$ mit

f	0	1
$[a_1, b_1]$	$\{[a_1, b_1], [a_2, b_1]\}$	
$[a_1, b_2]$	$\{[a_1, b_1], [a_2, b_1]\}$	$\dots$
$[a_2, b_1]$	$\{[a_2, b_2]\}$	
$[a_2, b_2]$	$\{[a_1, b_1], [a_1, b_2], [a_2, b_1], [a_2, b_2]\}$	

9. Diskussion

Die in den Abschnitten 3 bzw. 7 angegebenen Konstruktionen scheinen für große Systeme zu äußerst unökonomischen Realisierungen zu führen, da zur Codierung von n Zuständen $n - 1$ bistabile Komponenten bzw. 2^{n-1} Zustände benötigt werden. Es ist zu fragen, wie die Anforderungen an eine „Realisierung" so abgeschwächt werden können, daß die Zustandsmenge nicht wesentlich vergrößert zu werden braucht, ob es beispielsweise möglich ist, eine der Definition von Hartmanis und Stearns [3] (S. 28) entsprechende Festlegung zu finden, die auch den konstruktiven Gesichtspunkten gerecht wird.

Literatur

[1] Bacon, G. C., The decomposition of stochastic automata. Inform. and Control 7 (1964) 320–339.
[2] Hartmanis, J., Loop-free structure of sequential machines. Inform. and Control 5 (1962) 25–43.
[3] Hartmanis, J., Stearns, R. E., Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
[4] Starke, P. H., Theorie stochastischer Automaten I. EIK 1 (1965) 1, 5–32.
[5] Starke, P. H., Einige Bemerkungen über nicht-deterministische Automaten. EIK 2 (1966) 2, 61–82.
[6] Starke, P. H., Abstrakte Automaten. Berlin 1969.

Kurzfassung

Es wird konstruktiv gezeigt, daß sowohl jeder Z-endliche stochastische als auch nicht-deterministische Automat eine homomorphe Dekomposition (in bistabile Komponenten) besitzt. Damit wird eine Ergänzung zu den von Bacon [1] erzielten

Ergebnissen vorgelegt, die einen Algorithmus zur Konstruktion einer isomorphen Dekomposition für stochastische Automaten liefern, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Dieses Verfahren wird auf nicht-deterministische Automaten übertragen.

Abstract

It is shown constructively that every stochastic as well as non-deterministic automaton with finite state set has a homomorphic decomposition (into components having only two states). Thereby a supplement is given to the results of Bacon [1] which provide an algorithm to construct an isomorphic decomposition for stochastic automata satisfying certain conditions. This technique is transfered to non-deterministic automata.

Резюме

Конструктивно показывается, что как стохастический, так и недетерминистический автомат с конечным количеством состояний имеет гомоморфную декомпозицию (состоящая из бистабильных компонентов). Таким образом здесь публикуется дополнение к результатам полученным Бэконом [1], которые дают алгоритм для конструкции изоморфной декомпозиции стохастических автоматов, выполняющих определенные условия. Этот метод переносится на недетерминистические автоматы.

(Eingang: erste Fassung am 3. 2. 1970,
überarbeitete Fassung am 1. 2. 1971)

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. K.-A. Zech
1058 Berlin
Oderberger Str. 42