Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik
EIK 9 (1973) 4/5, 241–257

Realisierung des Zustandsverhaltens nicht-deterministischer Automaten

Von Karl-Adolf Zech[1])

0. Einleitung

Die Theorie der nicht-deterministischen Automaten hat bereits in einigen theoretisch orientierten Disziplinen, z. B. in der Theorie der formalen Sprachen, größere Bedeutung erlangt. Nicht so deutlich ist ihr Einfluß auf die Anwendung automaten-theoretischer Methoden bei der Lösung praktischer Probleme. Es zeigt sich, daß Entwurfsprobleme für informationsverarbeitende Systeme, z. B. digitale Schaltungen, mit Hilfe nicht-deterministischer Automaten formuliert werden können.

So geht man bei der automatentheoretischen Beschreibung des Verhaltens zu entwerfender digitaler Schaltungen von determinierten Automaten aus, die evtl. nicht vollständig definiert sind. Es ist angebracht, den nicht-deterministischen Automaten als Verallgemeinerung sowohl des vollständig als auch partiell definierten determinierten Automaten aufzufassen. Dabei können auch solche Übergangsbedingungen mit erfaßt werden, wo die Reaktion des Automaten nicht genau definiert, aber auch nicht völlig beliebig festlegbar ist. Dieses Problem taucht z. B. dort auf, wo ein Automat in einen anderen (Schaltung) eingebettet wird und stabile Zyklen außerhalb des eingebetteten Subautomaten vermieden werden sollen. Ein weiterer Gesichtspunkt ist bei digitalen Schaltungen die Verwendung nicht-deterministischer Bauelemente wie der RS-Flip-Flop. Das Verhalten dieses Speichers bei den Eingangsbedingungen $R = S = 1$ ist unbestimmt. Im allgemeinen wird daher $R \cdot S = 0$ gefordert, was jedoch zusätzlichen Aufwand verlangt.

Bislang wurden Relationen zwischen nicht-deterministischen Automaten häufig mit Mitteln untersucht, die aus der Theorie der determinierten Automaten bekannt und für diese auch adäquat sind (Homomorphie, Isomorphie, homomorphe und isomorphe Dekomposition). In diesem Artikel wird ein neuer Realisierungsbegriff für nicht-deterministische Automaten eingeführt, bei dem der zu realisierende Automat „nicht-deterministisch" durch einen anderen beschrieben wird. Es werden die Bedingungen dafür ermittelt, wann ein derartiger Automat eine Realisierung des „Zustandsverhaltens" besitzt.

Zur Formulierung der Sätze und Beziehungen wird die Notation des Prädikaten-Funktionen-Kalküls verwendet.

---

[1]) Institut für Nachrichtentechnik Berlin-Schöneweide, Organisations- und Rechenzentrum, Abteilung Technische Probleme (Institutsdirektor: Dr. Ing. D. Lochmann)

1. Grundlagen. Realisierungsbegriffe

Eingangs werden wir die grundlegenden Begriffe einführen (vgl. [4]), um dann verschiedene Konzeptionen für die Realisierung eines nicht-deterministischen Automaten zu diskutieren.

1.1. Definition. $A = [X, Y, Z, h]$ heißt *nicht-deterministischer Automat* (kurz NDA), wenn X, Y und Z nichtleere Mengen sind und $h: Z \times X \to\to \mathfrak{P}(Y \times Z) \setminus \{\emptyset\}$ [1]). X und Y heißen Eingabe- bzw. Ausgabesignalmenge, und Z ist die Menge der inneren Zustände von A. In jedem Takt t erhält A genau ein Eingabesignal x aus X. Befindet sich dann der Automat im Zustand z aus Z, so kann A genau dann das Signal y aus Y ausgeben und im nächsten Takt den Zustand z' aus Z annehmen, wenn $[y, z']$ aus $h(z, x)$ ist. Damit sind durch h die *Möglichkeiten* der Reaktion von A auf eine bestimmte *Situation* $[z, x]$ spezifiziert.

Das *Zustandsverhalten* von A wird durch die *Überführungsfunktion* f mit

$$f(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{z' / \exists\, y([y, z'] \in h(z, x))\}$$

für alle x aus X und z aus Z beschrieben. Die *Ergebnisfunktion* g legt die möglichen Ausgabesignale y von A in einer Situation $[z, x]$ fest und ist definiert durch

$$g(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{y / \exists\, z'([y, z'] \in h(z, x))\} .$$

Aus der Festlegung von h geht hervor, daß die Auswahl des Folgezustands und des Ausgabesignals nicht unabhängig voneinander erfolgt. Im allgemeinen ist also $h(z, x) \neq g(z, x) \times f(z, x)$.[2]) Um diese Abhängigkeit zu erfassen, definieren wir die *bedingte* Überführungsfunktion h_y sowie die *bedingte* Ergebnisfunktion $h_{z'}$ durch $h_y(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{z' / [y, z'] \in h(z, x)\}$ und $h_{z'}(z, x) =_{\mathrm{Df}} \{y / [y, z'] \in \in h(z, x)\}$. Es ist klar, daß die leere Menge im Wertebereich dieser Funktionen erhalten sein kann. Nun gilt

$$h(z, x) = \bigcup_{y \in g(z, x)} \{y\} \times h_y(z, x) = \bigcup_{z' \in f(z, x)} h_{z'}(z, x) \times \{z'\} .$$

Erfolgt die Auswahl des Ausgabesignals und des Folgezustandes unabhängig voneinander (MEALY-Automat) oder die des Ausgabesignals nur in Abhängigkeit vom bereits festgelegten Folgezustand (MOORE-Automat), so vereinfachen sich alle Definitionen und Bedingungen der folgenden Abschnitte in entsprechender Weise.

Das *Verhalten* v_A eines NDA A wird für jeden Anfangszustand z, $x \in X$ und jedes eingegebene Wort p über X rekursiv definiert wir folgt:

$$v_A(z, x) =_{\mathrm{Df}} g(z, x) ,$$
$$v_A(z, x\, p) =_{\mathrm{Df}} \bigcup_{y \in Y} \{y\} \cdot v_A(h_y(z, x), p) .$$

Wir betrachten nur solche Automaten, bei denen die Mengen X, Y und Z endlich sind.

1.2. Definition. Es seien $A = [X, Y, Z, h]$ und $A' = [X', Y', Z', h']$ beliebige NDA. $\chi = [\xi, \eta, \zeta]$ heißt *Homomorphismus von A auf A'* genau dann, wenn $\xi : X \to\to X'$, $\eta: Y \to\to Y'$, $\zeta: Z \to\to Z'$ (Abbildungen ‚auf') und das Diagramm

[1]) $\mathfrak{P}(Z)$ ist die Menge aller Teilmengen von Z.

[2]) $h(z, x) = g(z, x) \times f(z, x)$ genau dann, wenn A ein nicht-deterministischer MEALY-Automat ist.

$$
\begin{array}{ccc}
Z \times X & \xrightarrow{h} & \mathfrak{P}(Y \times Z) \setminus \{\emptyset\} \\
\zeta \downarrow \quad \downarrow \xi & & \eta \downarrow \quad \downarrow \zeta \\
Z' \times X' & \xrightarrow{h'} & \mathfrak{P}(Y' \times Z') \setminus \{\emptyset\}
\end{array}
$$

kommutiert. Der Homomorphismus χ heißt *Isomorphismus*, falls ξ, η und ζ eineindeutig sind. ζ heißt Z-Isomorphismus, falls $X = X'$, $Y = Y'$ und $[I_X, I_Y, \zeta]$ Isomorphismus ist, wobei I_X bzw. I_Y die entsprechenden identischen Abbildungen sind.

Zu weiteren Grundbegriffen s. [4].

1.3. Definition. Der NDA A'' heißt *homomorphe* (*isomorphe*) *Realisierung* des NDA A $\big($kurz $A'' \in HR(A)$ $(A'' \in IR(A))\big)$, wenn A homomorphes (isomorphes) Bild eines Teilautomaten A' von A'' ist.

Bei einer isomorphen Realisierung hat also jeder Zustand z von A' ein zu seinem Bild $\zeta(z)$ analoges Verhalten. Man kann sich mit Recht fragen, ob eine solche 1—1-Zuordnung der Zustände für ND-Automaten die gleiche Bedeutung hat wie für determinierte Automaten. Die beiden Situationen $[z, x]$ von A' und $[\zeta(z), \xi(x)]$ von A implizieren „bis auf ζ und η" lediglich die gleichen Möglichkeiten des Verhaltens. Daher können die tatsächlich realisierten Folgezustände und Ausgabesignale unterschiedlich i. b. a. ζ und η sein. Analoges gilt für homomorphe Realisierungen. Es bietet sich an, die Zuordnung $[\xi, \eta, \zeta]$ ebenfalls nicht-deterministisch zu fassen. Bei den folgenden Definitionen werden allerdings umgekehrt Abbildungen der Situationsparameter des Realisierten (Zustände, Eingabesignale) in die der Realisierung betrachtet.

Der Begriff der Realisierung des Zustandsverhaltens ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der isomorphen Realisierung, während die allgemeine Realisierungskonzeption auch die homomorphen Realisierungen mit einschließt.

Wir schreiben abkürzend $\mathfrak{P}^*(Z)$ für $\mathfrak{P}(Z) \setminus \{\emptyset\}$.

1.4. Definition. Der NDA A'' *realisiert das Zustandsverhalten* von $A = [X, Y, Z, h]$ $\big($kurz $A'' \in ZR(A)\big) =_{\mathrm{Df}}$.

Es gibt einen Teilautomaten $A' = [X', Y', Z', h']$ von A'' und Abbildungen $\xi\colon X \to \mathfrak{P}^*(X')$, $\zeta\colon Z \to \mathfrak{P}^*(Z')$, $\eta\colon Y' \to \mathfrak{P}^*(Y)$ derart, daß für alle $z, z' \in Z$, $x \in X$ und $y \in g'\big(\zeta(z), \xi(x)\big)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \zeta\big(h_{\eta(y)}(z, x)\big) = h'_y\big(\zeta(z), \xi(x)\big) \\
&\text{(ii)} \quad \zeta^{-1}\big(h'_y(\zeta(z), \xi(x)\big) = h_{\eta(y)}(z, x) \\
&\text{(iii)} \quad g(z, x) = \eta\big(g'(\zeta(z), \xi(x))\big) \;,
\end{aligned}
$$

wenn für jede auf einer Menge S definierten Abbildung φ das Bild $\varphi(N)$ für $N \subseteq S$ durch $\bigcup_{z \in N} \varphi(z)$ festgelegt ist.[1])

Die Bedeutung dieser Definition für das Zustandsverhalten soll das folgende Diagramm veranschaulichen:

$$
\begin{tikzcd}
\big(\zeta(z), \xi(x)\big) \arrow[rrr, dotted] & & & h'_y\big(\zeta(z), \xi(x)\big) \arrow[ddd, dotted, bend left, "\zeta^{-1}"] \\
& \mathfrak{P}^*(Z') \times \mathfrak{P}^*(X) \arrow[r, "h'_y"] \arrow[d, dashed] & \mathfrak{P}^*(Z') \arrow[d, shift left, dashed, "\zeta^{-1}"] & \\
& Z \times X \arrow[u, shift left, "\zeta,\ \xi"] \arrow[r, "h_{\eta(y)}"] & \mathfrak{P}^*(Z) \arrow[u, shift left, "\zeta"] & \\
(z, \quad x) \arrow[uuu, dotted, "\zeta,\ \xi"] \arrow[rrr, dotted] & & & h_{\eta(y)}(z, x) \arrow[uuu, dotted, "\zeta"]
\end{tikzcd}
$$

[1]) Bei MEALY-Automaten kann man für $h_{\eta(y)}$ bzw. h'_y vereinfachend f bzw. f' setzen.

Für „es gibt einen Teilautomaten A' von $A'' \in ZR(A)$ mit den unter 1.4 angeführten Eigenschaften" schreiben wir kurz $A' \in ZR(A)$.

1.5. Folgerung. *Wenn $A' \in ZR(A)$, so gilt für alle $z \in Z$, $x \in X$ und $z' \in Z'$*

$$\text{(i) } \eta\big(g'(z', \xi(x))\big) \subseteq \bigcap_{z^* \in \zeta^{-1}(z')} g(z^*, x)$$

$$\text{(ii) } g(z, x) = \bigcup_{z' \in \zeta(z)} \ \bigcap_{z^* \in \zeta^{-1}(z')} g(z^*, x) \,.$$

Beweis. Wegen $\eta\big(g'(\zeta(z^*), \xi(x))\big) = g(z^*, x)$ für alle z^* aus Z gilt für alle z^{**} aus $\zeta(z^*)$ $\eta\big(g'(z^{**}, \xi(x))\big) \subseteq g(z^*, x)$. Diese Beziehung ist auch für festes z^{**} und alle z^* aus $\zeta^{-1}(z^{**})$ gültig, woraus (i) folgt. Für (ii) vereinigen wir (i) über alle z' aus $\zeta(z)$, woraus sich mit 1.4.(iii) die eine Inklusionsrichtung ergibt. Die Umkehrung ist trivial. ▮

1.6. Folgerung. *Wenn $A' \in ZR(A)$, so gilt für alle $z \in Z$, $x \in X$, $z^* \in Z'$ und $y \in g'\big(z^*, \xi(x)\big)$*

$$\zeta^{-1}\big(h'_y(z^*, \xi(x))\big) \subseteq \bigcap_{z' \in \zeta^{-1}(z^*)} h_{\eta(y)}(z', x) \,.$$

Beweis. Ähnlich wie 1.5. ▮

1.7. Satz. *Für alle* NDA *A gilt $IR(A) \subseteq ZR(A)$.*

Beweis. Man weist leicht nach, daß ξ, ζ und η mit $\xi = \xi'^{-1}$ und $\zeta = \zeta'^{-1}$ die Bedingungen von Definition 1.4 erfüllen, sobald $\chi = [\xi', \zeta', \eta]$ ein Isomorphismus von der Realisierung auf A ist. ▮

Wir verallgemeinern den Realisierungsbegriff 1.4:

1.8. Definition. Der NDA A'' *realisiert* den NDA $A = [X, Y, Z, h]$ $\big(A'' \in R(A)\big) =_{\mathrm{Df}}$.

Es gibt einen Teilautomaten $A' = [X', Y', Z', h']$ von A'' und Abbildungen $\xi\colon X \to \mathfrak{P}^*(X')$, $\zeta\colon Z \to \mathfrak{P}^*\big(\mathfrak{P}^*(Z')\big)$, $\eta\colon Y' \to \mathfrak{P}^*(Y)$ derart, daß

$$\text{(i) } \forall z \,\forall x \,\forall M \,\forall y \,\exists \mathfrak{M} \big(z \in Z \wedge x \in X \wedge M \in \zeta(z) \wedge y \in g'\big(M, \xi(x)\big) \wedge \mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{z'' \in h_{\eta(y)}(z, x)} \zeta(z'') \wedge \bigcup \mathfrak{M} = h'_y(M, \xi(x)). \wedge \forall z' \,(z' \in h_{\eta(y)}(z, x) \to \mathfrak{M} \cap \zeta(z') \neq \emptyset)\big)$$

$$\text{(ii) } \forall z \,\forall M \,\big(z \in Z \wedge M \in \zeta(z) \to \eta\big(g'(M, \xi(x))\big) = g(z, x)\big) \,.$$

Interpretation. Hier wird jedem Zustand von A nicht nur eine Menge von Zuständen aus A' zugeordnet, wie das bei 1.4 der Fall ist, sondern jedem A-Zustand entspricht eine *Menge* von Zustandsmengen von A'. Jede dieser Zustandsmengen „leistet" i. b. a. $\xi(x)$ das gleiche. Aus (i) folgt weiter, daß zwar $h'_y\big(M, \xi(x)\big)$ in $\bigcup \zeta\big(h_{\eta(y)}(z, x)\big)$ *echt* enthalten sein kann, wobei aber garantiert ist, daß es für jeden Folgezustand z' von A ein M' aus $\zeta(z')$ gibt, das ganz in $h'_y\big(M, \xi(x)\big)$ liegt. Das sichert, daß jedem möglichen Folgezustand z' von A in der Realisierung durch wenigstens ein M' aus $\zeta(z')$ entsprochen wird. Für andere M'' aus $\zeta(z')$ kann $M'' \nsubseteq h'_y\big(M, \xi(x)\big)$ gelten.

1.8 geht in 1.4 über, wenn ζ nur Einermengen $\big($aus $\mathfrak{P}^*(Z')\big)$ als Werte hat. Daher gilt $ZR(A) \subseteq R(A)$.

1.9. Folgerung. *Für alle A gilt*

$$IR(A) \subset HR(A) \subseteq R(A) \supset ZR(A) \,.$$

Beweis. Wir zeigen, daß $HR(A) \subseteq R(A)$. Sei $A'' \in HR(A)$. Dann gibt es einen Teilautomaten A' von A'' und einen Homomorphismus $\chi' = [\xi', \eta', \zeta']$ von A' auf A. (Dafür schreiben wir kurz $A' \in HR(A)$. Das gilt auch für die Realisierungen gemäß 1.8.) Wir definieren $\xi =_{\mathrm{Df}} \xi'^{-1}$, $\eta =_{\mathrm{Df}} \eta'$, und für alle $z \in Z$ sei $\zeta(z) =_{\mathrm{Df}} \{\{z'\} / \zeta'(z') = z\}$.

Behauptung. Die Abbildungen ξ, η und ζ entsprechen den Zuordnungsfunktionen einer Realisierung von A.

Es ist zu zeigen:

$$\text{(i)}\ \forall z \,\forall x \,\forall \{z^*\} \,\forall y \,\exists \mathfrak{M} \Big(z \in Z \wedge x \in X \wedge \{z^*\} \in \zeta(z) \wedge y \in g'(z^*, \xi(x)) \wedge \mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{z'' \in h_{\eta(y)}(z,\, x)} \zeta(z'') \wedge \bigcup \mathfrak{M} = h'_y(\{z^*\}, \xi(x)) \wedge \forall z' \,(z' \in h_{\eta(y)}(z, x) \to \mathfrak{M} \cap \zeta(z') \neq \emptyset)\Big)\,,$$

$$\text{(ii)}\ \forall z \,\forall \{z^*\} \,\big(\{z^*\} \in \zeta(z) \wedge z \in Z \to \eta\big(g'(\{z^*\}, \xi(x))\big) = g(z, x)\big)\,.$$

Für Homomorphismen ist $\eta'\big(g'(z', x')\big) = g\big(\zeta'(z'), \xi'(x')\big)$ bei $x' \in X'$ und $z' \in Z'$, woraus sich sofort (ii) ergibt. Ferner gilt für $y \in g'(z^*, x')$ $\zeta'\big(h'_y(z^*, x')\big) = h_{\eta(y)}\big(\zeta'(z^*), \xi'(x')\big)$, woraus mit $\mathfrak{M} =_{\mathrm{Df}} \{\{z^{**}\} / z^{**} \in h'_y(z^*, x')\}$ $\mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{z'' \in h_{\eta(y)}(z,\, x)} \zeta(z'')$ sowie $\bigcup \mathfrak{M} = h'_y\big(\{z^*\}, \xi(x)\big)$ folgt. Es ist klar, daß es kein z' aus $h_{\eta(y)}\big(\zeta'(z^*), \xi'(x')\big)$ gibt, für das kein z^{**} aus $h'_y(z^*, x')$ (bzw. $\{z^{**}\}$ aus $\mathfrak{M}$) existiert mit $\zeta'(z^{**}) = z'$ $\big($bzw. $\zeta(z') \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset\big)$, sobald $y \in g'(z^*, x')$. Damit ist die Folgerung bewiesen. ∎

Im folgenden sei stets $A = [X, Y, Z, h]$ und $A' = [X', Y', Z', h']$ ein Teilautomat von A''.

1.10. Satz. *Sei $A' \in R(A)$. Dann gilt für alle z aus Z, M aus $\zeta(z)$ und Wörter p über X*

$$v_A(z, p) = \eta\big(v_{A'}(M, \xi(p))\big)\,,$$

wenn ξ komponentenweise auf Wörter ausgedehnt wird: $\xi(x\,p) = \xi(x)\,\xi(p) = \{x'\,p' / x' \in \xi(x) \wedge p' \in \xi(p)\}$.

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv wie folgt.

Induktionsanfang: $v_A(z, x) = g(z, x) = \eta\big(g'(M, \xi(x)) = \eta(v_{A'}(M, \xi(x))\big)$ wegen 1.8. (ii).

Induktionsschritt: $\eta\big(v_{A'}(M, \xi(x\,p))\big) = \eta\Big(\bigcup_{y \in g'(M,\, \xi(x))} \{y\} \cdot v_{A'}\big(h'_y(M, \xi(x)), \xi(p)\big)\Big) = \bigcup_{y \in g'(M,\, \xi(x))} \eta(y) \cdot \eta\big(v_{A'}(h'_y(M, \xi(x)), \xi(p))\big)$. Nach 1.8. (i) gibt es für y aus $g'\big(M, \xi(x)\big)$ ein $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{z'' \in h_{\eta(y)}(z,\, x)} \zeta(z'')$ und $\bigcup \mathfrak{M} = h'_y\big(M, \xi(x)\big)$. Daher kann die Kette fortgesetzt werden: $= \bigcup_{y \in g'(M,\, \xi(x))} \eta(y) \cdot \eta\big(v_{A'}(\bigcup \mathfrak{M}, \xi(p))\big)$.

Für alle z' aus $h_{\eta(y)}(z, x)$ gibt es wegen 1.8. (i) stets ein M' aus $\zeta(z')$ mit $M' \in \mathfrak{M}$, das wir mit $\zeta_{\mathfrak{M}}(z')$ bezeichnen. Daher:

$$= \bigcup_{y \in g'(M,\, \xi(x))} \eta(y) \cdot \bigcup_{z' \in h_{\eta(y)}(z,\, x)} \eta\big(v_{A'}(\zeta_{\mathfrak{M}}(z'), \xi(p))\big)$$

$$= \bigcup_{y \in g'(M,\, \xi(x))} \eta(y) \bigcup_{z' \in h_{\eta(y)}(z,\, x)} v_A(z', p) \text{ (wegen Ind. vor.)}$$

$$= \bigcup_{y^* \in g(z,\, x)} \{y^*\} \bigcup_{z' \in h_{y^*}(z,\, x)} v_A(z', p) = v_A(z, x\,p)\,. ∎$$

1.11. Folgerung. *Bezeichnet* $A \underset{\approx}{\subsetneq} A'$ *die schwach äquivalente Einbettung von* A *in* A' (vgl. [4]), *so gilt:*

$$A' \in R(A) \wedge \xi = I_X \wedge \eta = I_Y \rightarrow A \underset{\approx}{\subsetneq} A'.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 1.10. ▮

2. Zulässige Zustandssysteme. Zulässige Überlagerungsfunktionen und Partitionen

Wir wollen nun weitere Bedingungen für die Realisierung des Zustandsverhaltens (kurz: Z-Realisierungen) nicht-deterministischer Automaten herausarbeiten. Wir verwenden die Relation $\leqq$ (‚feiner als') und die Operation $\cdot$ (‚mal') für Mengensysteme wie in [2] und setzen $\pi_M =_{\mathrm{Df}} \{M, Z \setminus M\}$ für $M \subseteq Z$. Zunächst gilt

2.1. Satz. *Seien* $A' \in ZR(A)$ *und* $\mathfrak{y} = \{\eta(y)/y \in Y'\}$. *Für* $Q \in \mathfrak{y}$ *hat das Mengensystem* $\mathfrak{z} = \{\zeta^{-1}(z')/z' \in Z'\}$ *folgende Eigenschaften.*

$$\text{(0)}\quad \bigcup \mathfrak{z} = Z$$

$$\text{(i)}\quad \forall z \forall z' \exists K\big(z, z' \in Z \wedge \exists Q \exists x\big(x \in X \wedge (Q \subseteq g(z, x) \vee Q \subseteq g(z', x)) \wedge h_Q(z, x) \neq h_Q(z', x)\big) \wedge K \in \mathfrak{z} \wedge (z \in K \wedge z' \notin K \vee z \notin K \wedge z' \in K)\big)$$

$$\text{(ii)}\quad \forall z \forall z' \forall K\,\big(z, z' \in Z \wedge K \in \mathfrak{z} \cdot \rightarrow \cdot (z \in K \rightarrow z' \in K) \rightarrow \forall x \forall Q\,(x \in X \wedge Q \subseteq g(z, x) \rightarrow h_Q(z, x) \subseteq h_Q(z', x))\big)$$

$$\text{(iii)}\quad \mathfrak{z} \leqq \prod_{\substack{z \in Z,\, x \in X,\\ Q \subseteq g(z, x)}} \pi_{h_Q(z, x)}$$

$$\text{(iv)}\quad \forall K \forall x \Big(K \in \mathfrak{z} \wedge x \in X \rightarrow \bigcap_{z \in K} g(z, x) \neq \emptyset\Big)$$

$$\text{(v)}\quad \forall z \forall x \Big(z \in Z \wedge x \in X \rightarrow g(z, x) = \bigcup_{K \in \mathfrak{z} \wedge z \in K} \; \bigcap_{z' \in K} g(z', x)\Big)$$

$$\text{(vi)}\quad \forall K \forall x \forall Q \Big(K \in \mathfrak{z} \wedge x \in X \wedge Q \subseteq \bigcap_{z' \in K} g(z', x) \rightarrow \bigcap_{z' \in K} h_Q(z', x) \neq \emptyset\Big).$$

Beweis. (i) Wir nehmen an, daß für zwei Zustände z und z' mit $h_Q(z, x) \neq h_Q(z', x)$ die Beziehung $z \in K \leftrightarrow z' \in K$ für alle $K \in \mathfrak{z}$ gilt. Daraus folgt aber $\zeta(z) = \zeta(z')$ im Widerspruch zu $h_Q(z, x) \neq h_Q(z', x)$ und 1.4. (ii).

Für (ii) stellen wir fest, daß mit $z \in K \rightarrow z' \in K$ $\zeta(z) \subseteq \zeta(z')$ ist. Aus 1.4. (ii) ergibt sich damit die Behauptung.

Um (iii) zu beweisen, zeigen wir die Gültigkeit des Ausdrucks

$$\forall z' \forall z''\,\big(z', z'' \in Z \wedge \exists z \exists x \exists Q\,(x \in X \wedge z \in Z \wedge Q \subseteq g(z, x) \wedge z' \in h_Q(z, x) \wedge z'' \notin h_Q(z, x)) \rightarrow \forall K\,(K \in \mathfrak{z} \rightarrow z' \in K \wedge z'' \notin K \vee z' \notin K \wedge z'' \in K)\big).$$

Wir nehmen an, daß es für zwei Zustände z', z'' mit $z' \in h_Q(z, x)$ und $z'' \notin h_Q(z, x)$ ein K aus $\mathfrak{z}$ gibt mit $z' \in K$ und $z'' \in K$. Wegen 1.4. (i) ist $\zeta(z') \subseteq h'_y(\zeta(z), \xi(x))$ für alle $y \in Y'$ mit $\eta(y) = Q$. Es folgt $z'' \in K \subseteq \zeta^{-1}\zeta(z') \subseteq h_Q(z, x)$ aus 1.4. (ii) im Widerspruch zur Voraussetzung. Aus dem eben bewiesenen Ausdruck ergibt sich

$$\forall x \forall z \forall Q \forall K\,\big(z \in Z \wedge x \in X \wedge Q \subseteq g(z, x) \wedge K \in \mathfrak{z} \rightarrow K \subseteq h_Q(z, x) \vee K \cap h_Q(z, x) = \emptyset\big)$$

und damit (iii).

Die übrigen Aussagen folgen unmittelbar aus 1.5 und 1.6. ▮

2.2. Folgerung. *Es seien* $\mathfrak{y}$ *wie unter* 2.1 *definiert und* $\mathfrak{E} = \{h_Q(z, x) / z \in Z \wedge x \in X \wedge Q \in \mathfrak{y} \wedge Q \subseteq g(z, x)\}$ *ein Erzeugendensystem für die Algebra* $\mathfrak{A} = [\mathfrak{u}, \cup, \cap, \mathfrak{E}]$. $\mathfrak{A}$ *hat folgende Eigenschaften.*

$$\text{(i) } \forall K \left(K \in \mathfrak{u} \to \zeta^{-1} \zeta(K) = K\right)$$

$$\text{(ii) } \forall z \, \forall x \, \forall Q \, \exists \mathfrak{M} \left(z \in Z \wedge x \in X \wedge Q \in \mathfrak{y} \wedge Q \subseteq g(z, x) \wedge \wedge \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{u} \wedge \bigcup \mathfrak{M} = h_Q(z, x)\right)$$

$$\text{(iii) } \mathfrak{z} \leqq \mathfrak{u}\,.$$

Beweis. Wegen 1.4. (i) und (ii) gilt (i) für alle K aus $\mathfrak{E}$. Für beliebige $K \in \mathfrak{u}$ beweisen wir die Behauptung induktiv über die Erzeugungsstufen in bezug auf $\cup$ und $\cap$. Sei $K = K_1 \cap K_2$ und (i) für K_1 und K_2 richtig. Dann gilt $\zeta^{-1} \zeta(K) = \zeta^{-1} \zeta\,(K_1 \cap K_2) \subseteq \zeta^{-1} \zeta(K_1) \cap \zeta^{-1} \zeta(K_2) = K_1 \cap K_2 = K \subseteq \zeta^{-1} \zeta\,(K_1 \cap K_2)$. Für $K = K_1 \cup K_2$ ist andererseits $\zeta^{-1} \zeta(K) = \zeta^{-1} \zeta\,(K_1 \cup K_2) = \zeta^{-1} \zeta(K_1) \cup \zeta^{-1} \zeta(K_2) = K_1 \cup K_2 = K$. (ii) und (iii) sind triviale Folgerungen aus den Definitionen von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{z}$. ▮

2.3. Bemerkung. Die durch ζ induzierte Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf die Algebra $\mathfrak{A}' = [\mathfrak{u}', \cap, \cup, \mathfrak{E}']$ mit $\mathfrak{E}' = \{h'_y(z, x) / z \in Z' \wedge x \in X' \wedge y \in g'(z, x)\}$ ist eineindeutig. ▮

2.4. Definition. Sei A ein NDA und $\mathfrak{u}$ eine Überdeckung von Z, die nicht gröber als $\mathfrak{E} = \{h_y(z, x) / y \in g(z, x) \wedge z \in Z \wedge x \in X\}$ ist. Dann heißt $A/\mathfrak{u} = [X, Y, \mathfrak{u}, \bar{h}]$ *Faktorautomat* von A nach $\mathfrak{u}$, wenn für alle $x \in X$, $y \in Y$ und $U \in \mathfrak{u}$ gilt:

$$\bar{h}(U, x) = \{[y, U'] / y \in g(U, x) \wedge U' \in u \wedge U' \subseteq h_y(U, x)\}\,.$$

2.5. Satz. *Es seien* $A = [X, Y, Z, h]$ *und* $A' = [X, Y, Z', h']$ *beliebige* NDA *mit* $A' \in ZR(A)$, $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}'$ *und* ζ *seien wie oben definiert und* $\xi = I_X$, $\eta = I_Y$ *die identischen Abbildungen. Die durch* ζ *induzierte eineindeutige Abbildung* ζ *von* $\mathfrak{u}$ *auf* $\mathfrak{u}'$ *ist ein Z-Isomorphismus von* $A/\mathfrak{u}$ *auf* $A'/\mathfrak{u}'$.

Beweis. Es ist zu zeigen: Für alle $U, U' \in \mathfrak{u}$, $x \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$[y, U'] \in \bar{h}(U, x) \leftrightarrow [y, \bar{\zeta}(U')] \in \bar{h}'\left(\bar{\zeta}(U), x\right)\,.$$

Es ist für alle $y \in g(U, x) = g'\left(\zeta(U), x\right)$ und $U' \in \mathfrak{u}$ $U' \in \bar{h}_y(U, x) \underset{2.4}{\leftrightarrow} U' \subseteq h_y(U, x)$

$$\underset{1.4.(i)}{\leftrightarrow} \zeta(U') \subseteq h'_y\left(\zeta(U), x\right)$$

$$\leftrightarrow \zeta(U') \in \bar{h}'_y\left(\zeta(U), x\right)\,,$$

woraus die Behauptung folgt. ▮

Der Satz 2.5 zeigt, daß zwischen zwei NDA's gewisse isomorphe Beziehungen bestehen, wenn der eine das Zustandsverhalten des anderen realisiert. In Analogie zu den determinierten Automaten, wo ein Automat A'' das Zustandsverhalten eines anderen Automaten A genau dann realisiert, wenn A isomorph zu einem Teilautomaten A' von A'' ist, rechtfertigt 2.5 die Bezeichnung „Realisierung des Zustandsverhaltens".

2.6. Definition. Es sei A ein NDA und $\mathfrak{y}$ eine Überdeckung von Y mit $\mathfrak{y} \leqq \{g(z, x) \mid z \in Z \wedge x \in X\}$. Eine Teilmenge $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{P}^*(Z)$ mit den Eigenschaften 2.1. (0) . . . (vii) heißt $\mathfrak{y}$*-zulässiges Zustandssystem* ($\mathfrak{y}$-ZZ) *von* $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{y}$ wird an der Bezeichnung weggelassen, wenn es sich um die Menge aller Einermengen $\{y\}$ von Y handelt.

2.7. Bemerkung. Für alle A ist $\mathfrak{z} = \{\{z\}/z \in Z\}$ ein ZZ. ▮

Unter einer $\mathfrak{z}$-*Partition* verstehen wir in folgendem eine Zerlegung von $\mathfrak{z}$, wenn $\mathfrak{z}$ eine beliebige Überdeckung (bzw. eine beliebiges überdeckendes Mengensystem) einer Menge Z ist. Ist der Zusammenhang klar, so schreiben wir kurz ‚Partition'. Die Menge aller $\mathfrak{z}$-Partitionen einer Menge Z bildet einen *Verband* $[\mathfrak{M}, \leqq, 0_{\mathfrak{z}}, 1_{\mathfrak{z}}]$, wobei $\leqq$ wie in [2] definiert ist und $0_{\mathfrak{z}}$ bzw. $1_{\mathfrak{z}}$ die 0- bzw. 1-Zerlegung von $\mathfrak{z}$ sind. Die beiden Operationen $\cdot$ und $+$ werden wie üblich durch $\pi \cdot \tau =_{\mathrm{Df}} \inf(\pi, \tau)$ sowie $\pi + \tau =_{\mathrm{Df}} \sup(\pi, \tau)$ festgelegt.

2.8. Definition. Es sei A ein beliebiger NDA, $\mathfrak{y}$ ein Y überdeckendes Mengensystem und $\mathfrak{z}$ ein $\mathfrak{y}$-ZZ. Eine eindeutige Abbildung P von $\mathfrak{y} \times \mathfrak{z} \times X$ in $\mathfrak{P}(Z)$ heißt $\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-*zulässige Überlagerungsfunktion* von h (kurz $\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-ZÜF für h), falls für alle $z \in Z$, $x \in X$ und $Q \in \mathfrak{y}$ gilt:

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{z} \wedge z \in K} P_Q(K, x) = \{K'/K' \in \mathfrak{z} \wedge K' \subseteq h_Q(z, x)\}\ ^{1)}$$

2.9. Bemerkung. P^Y ist mit $P^Y_y(z, x) =_{\mathrm{Df}} h_y(z, x)$ stets eine Y-Z-ZÜF. ▮

In Verallgemeinerung von [5] definieren wir den Begriff der Unabhängigkeit einer Partitionsmenge:

2.10. Definition. Seien A ein NDA, $\mathfrak{y}$ wie oben definiert, $\mathfrak{z}$ ein $\mathfrak{y}$-ZZ und $\mathfrak{M} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ mit $n \geqq 1$ eine Menge von $\mathfrak{z}$-Partitionen sowie eine $\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-ZÜF für h. $\mathfrak{M}$ heißt *P-unabhängig*, wenn für alle Q aus $\mathfrak{y}$, $K \in \mathfrak{z}$, $x \in X$ gilt

$$\forall N_1 \forall \cdots \forall N_n \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \pi_i \cdot \rightarrow \cdot$$
$$\bigwedge_{i=1}^{n} \big(N_i \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\big) \leftrightarrow \emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} N_i \cap P_Q(K, x)\Bigg). \ ▮$$

2.11. Lemma. *Seien $A, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, P$ und $\mathfrak{M}$ wie oben erklärt. $\mathfrak{M}$ ist genau dann P-unabhängig, wenn für jede Überdeckung $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_m\}$ von $\mathfrak{M}$ gilt:*

(i) *Für alle i $(1 \leqq i \leqq m)$ ist $\mathfrak{N}_i$ P-unabhängig;*

(ii) *$\Big\{\prod_{\pi \in \mathfrak{N}_i} \pi / i \in \{1, \ldots, m\}\Big\}$ ist P-unabhängig.*

Beweis. Sei $\mathfrak{N}_j = \{\pi_{j_1}, \ldots, \pi_{j_{n_j}}\}$. Aufgrund der Voraussetzung gilt für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$, $K \in \mathfrak{z}$ und $Q \in \mathfrak{y}$

$$\forall N_{j_1} \forall \cdots \forall N_{j_{n_j}} \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{n_j} N_{j_i} \in \pi_{j_i} \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n_j} \big(N_{j_i} \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\big) \rightarrow$$
$$\exists N_{r_1} \cdots \exists N_{r_{m-n_j}} \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{m-n_j} N_{r_i} \in \pi_{r_i} \wedge r_i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1, \ldots, j_{n_j}\}$$
$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \big(N_i \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\big) \xleftrightarrow{\text{Vorauss.}} \bigcap_{i=1}^{n} N_i \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\Bigg)$$
$$\rightarrow \bigcap_{i=1}^{n_j} N_{j_i} \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\Bigg).$$

---

1) Diese Bedingung kann nur gelten, wenn $\mathfrak{z}$ ein $\mathfrak{y}$-ZZ ist, genauer, wenn 2.1. (i), (ii), (vi) und (vii) erfüllt sind. Wegen (vi) kann bei $Q \subseteq g(z, x)$ $P_Q(K, x) \neq \emptyset$ gewählt werden. (Um auf den Zusammenhang mit $h_Q(z, x)$ hinzuweisen, schreiben wir $P_Q(K, x)$ statt $P(Q, K, x)$.)

Mit der trivialen Umkehrung ergibt sich (i):

$$\forall N_{j_1} \forall \cdots \forall N_{j n_j}\left(\bigwedge_{i=1}^{n_j} N_{ji} \in \pi_{ji} \rightarrow \right.$$
$$\left.\bigwedge_{i=1}^{n_j} \left(N_{ji} \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\right) \leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n_j} N_{ji} \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\right).$$

Andererseits ist

$$\forall N_1 \cdots \forall N_n\left(\bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \pi_i \cdot \rightarrow \cdot\right.$$
$$\bigwedge_{j=1}^{m}\left(\bigcap_{i=1}^{n_j} N_{ji} \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\right) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \left(N_i \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\right)$$
$$\left.\leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n_j} \left(N_{ji} \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\right) \leftrightarrow \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{n_j} N_{ji} \cap P_Q(K, x) \neq \emptyset\right),$$

woraus (ii) folgt. Ähnlich wird die Umkehrung bewiesen. ∎

2.12. Definition. Seien A, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und P wie oben erklärt.

(i) Das geordnete Paar $[\pi, \tau]$ von $\mathfrak{z}$-Partitionen heißt *P-Partitionspaar* für A (kurz P-PP), falls für alle $Q \in \mathfrak{y}$ und $x \in X$ gilt:

$$\forall N \forall N' \forall K \forall K' \left(N \in \pi \wedge N' \in \tau \wedge K, K' \in N \rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow P_Q(K, x) \cap N' \neq \emptyset \leftrightarrow P_Q(K', x) \cap N' \neq \emptyset\right)$$

(ii) π hat die *Substitutionseigenschaft* i. b. a. P (kurz π ist P-SPP), falls $[\pi, \pi]$ P-PP ist. (Vgl. Beispiele.)

3. Automatennetze. ZR-Dekomposition nicht-deterministischer Automaten

In diesem Abschnitt wollen wir die Bedingungen für die „Zerlegbarkeit" eines NDA ermitteln. Dazu müssen zunächst die Begriffe Automatennetz und Dekomposition präzisiert werden.

3.1. Definition. Der NDA $A = [X, Y, Z, h]$ heißt *Netz* aus den ND-Halbautomaten (Komponenten) $A_1 = [X_1, Z_1, f_1], \ldots, A_n = [X_n, Z_n, f_n]$ $(n \geqq 2) =_{\mathrm{Df}}$

$$X_{i(1:n)} = X \times Z_1 \cdots \times \widehat{Z}_i \times \cdots \times Z_n \times Y =_{\mathrm{Df}}$$
$$X \times Z_1 \times \cdots \times Z_{i-1} \times Z_{i+1} \times \cdots \times Z_n \times Y$$
$$Z = \mathop{\times}_{i=1}^{n} Z_i$$
$$h_y([z_1, \ldots, z_n], x) = \mathop{\times}_{i=1}^{n} f_i(z_i, [x, z_1, \ldots, \widehat{z}_i, \ldots, z_n, y])$$

für $z_i \in Z_i$ und $y \in g([z_1, \ldots, z_n], x)$. Dabei wird $\mathrm{Card}\,(Z_i) > 1$ für alle i gefordert, um sinnlose Netzkomponenten auszuschließen.[1])

[1]) $\mathrm{Card}\,(Z') > \mathrm{Card}\,(Z_i)$ kann man dann fordern, wenn ein NDA A' in das Netz *eingebettet* werden soll (vgl. 3.2). Allerdings kann der Fall eintreten, daß man bei einer gewünschten Struktur der Komponenten Vergrößerungen der Zustandsmengen in Kauf nehmen muß.

A heißt *schleifenfrei*, falls (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) für alle $i < n$, $z_j, z_j' \in Z_j$ gilt

$$f_i(z_i, [x, z_1, \ldots, z_{i-1}, \hat{z}_i, z_{i+1}, \ldots, z_n, y]) =$$
$$f_i(z_i, [x, z_1, \ldots, z_{i-1}, \hat{z}_i, z'_{i+1}, \ldots, z'_n, y]),$$

d. h., A_i hängt höchstens von den Komponenten $A_1, \ldots, A_{i-1}$ (und von x und y) ab. ▮

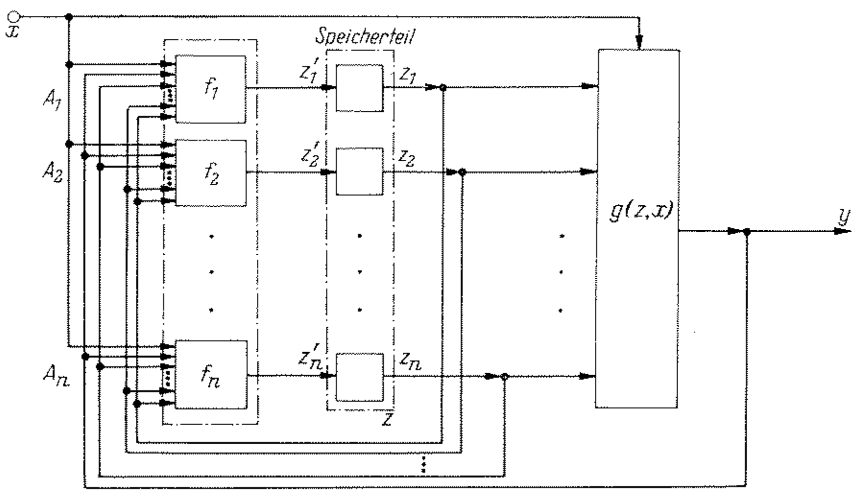

Abb. 1. Automatennetz gemäß 3.1.

Wir verzichten hier darauf, allgemeinere Netzdefinitionen zu geben, die z. B. als Komponenten auch NDA's mit Ausgabe zulassen oder wie die in [2].

3.2. Definition. Das Netz $A'' = [X, Y, Z'', h'']$ heißt *ZR-Dekomposition* des NDA $A = [X, Y, Z, h]$ (kurz $A'' \in ZRD(A)$), wenn $A'' \in ZR(A)$ und $\xi = I_X$ und $\eta = I_Y$ die identischen Abbildungen sind. Anstatt $A'' \in ZRD(A)$ schreiben wir auch $A' \in ZRD(A)$, wenn A' der Teilautomat von A'' mit den unter 1.4 benannten Eigenschaften ist.

Die Abbildung ζ nennen wir Zuweisungsfunktion von A auf A' (in A''). ▮

3.3. Satz. *Seien A ein* NDA *und P^Y die eindeutige Abbildung von $Y \times Z \times X$ in $\mathfrak{P}(Z)$ mit $P_y^Y(z, x) = h_y(z, x)$ für $y \in Y$, $z \in Z$ und $x \in X$. A besitzt genau dann eine isomorphe Dekomposition aus n Komponenten, wenn es eine Menge $\mathfrak{M} = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ von Z-Partitionen mit $\prod_{i=1}^{n} \tau_i = 0$ gibt und $\mathfrak{M}$ P^Y-unabhängig ist.*

Beweis. Für $i = 1, \ldots, n$ definieren wir die i-te Komponente $A_i = [X_i, Z_i, f_i]$ durch $X_i =_{\mathrm{Df}} X \times \tau_1 \times \cdots \times \hat{\tau}_i \times \cdots \times \tau_n \times Y$, $Z_i =_{\mathrm{Df}} \tau_i$ und

$$f_i(N_i, [x, N_1, \ldots, \hat{N}_i, \ldots, N_n, y]) =_{\mathrm{Df}}$$
$$= \begin{cases} \left\{ N_i' / N_i' \in \tau_i \wedge h_y\left(\iota z\left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right), x\right) \cap N_i' \neq \emptyset \right\}, & \text{falls } \bigcap_{i=1}^{n} N_i \neq \emptyset \\ \text{beliebige, nichtleere Teilmenge von } \tau_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die A_i sind NDA. Mit $Z' = \left\{[N_1, \ldots, N_n] / \bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \tau_i \wedge \bigcap_{i=1}^{n} N_i \neq \emptyset\right\}$ und $[y, [N'_1, \ldots, N'_n]] \in h'([N_1, \ldots, N_n], x) \xrightarrow[\mathrm{Df}]{} y \in g(z, x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (N'_i \in f_i(N_i, [x, N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n, y])$ ist auch $A' =_{\mathrm{Df}} [X, Y, Z', h']$ ein NDA. A' ist Teilautomat des Netzes $A'' = [X, Y, Z'', h'']$ mit $Z'' = \bigtimes_{i=1}^{n} \tau_i$ und

$$h''(z, x) = \begin{cases} h'(z, x)\,, & \text{falls} \quad z \in Z' \\ \text{beliebig, nichtleer, sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen, daß es einen Z-Isomorphismus ζ von A auf A' gibt. Wir setzen für $z \in Z$ $\zeta(z) =_{\mathrm{Df}} [N_1, \ldots, N_n]$, wenn für alle i $z \in N_i$ ist. ζ ist eine eineindeutige Abbildung, da die τ_i *Zerlegungen* von Z mit $\prod_{i=1}^{n} \tau_i = 0$ sind.

Aufgrund der Definition von h' ist ζ genau dann ein Z-Isomorphismus von A auf A', wenn für alle $y \in Y$ gilt

$$z' \in h_y(z, x) \leftrightarrow \zeta(z') \in h'_y(\zeta(z), x)\,.$$

Nun ist mit $\zeta(z') = [N'_1, \ldots, N'_n]$ und $\zeta(z) = [N_1, \ldots, N_n]$

$$\begin{aligned} &[N'_1, \ldots, N'_n] \in h'_y([N_1, \ldots, N_n], x) \leftrightarrow \\ &\bigwedge_{i=1}^{n} (N'_i \in f_i(N_i, [N_1, \ldots, \widehat{N}_i, \ldots, N_n, y])) \\ &\leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \left(N'_i \cap h_y\left(\iota z \left(z \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i\right), x\right) \neq \emptyset\right) \\ &\leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} (N'_i \cap P_y^Y(z, x) \neq \emptyset) \xleftrightarrow{2.10} \emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} N'_i \cap P_y^Y(z, x) \\ &\leftrightarrow z' \in h_y(z, x)\,. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß die genannten Bedingungen hinreichend sind. Ebenso leicht beweist man ihre Notwendigkeit. ▮

3.4. Satz. *A_3 ist genau dann eine ZR-Dekomposition von A_1, wenn es eine ZR-Realisierung A_2 von A_1 gibt, für die A_3 isomorphe ZR-Dekomposition ist.* ▮

3.5. Hauptsatz. *$A' \in ZRD(A)$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Es gibt ein ZZ $\mathfrak{z}$, eine Y-$\mathfrak{z}$-ZÜF P von h und eine P-unabhängige Menge $\mathfrak{M} = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ von $\mathfrak{z}$-Partitionen mit $\prod_{i=1}^{n} \tau_i = 0_{\mathfrak{z}}$.*

Beweis. Wegen 3.4 genügt es zu zeigen, daß eine Z-Realisierung A' von A und eine P^Y-unabhängige Menge $\mathfrak{M}' = \{\tau'_1, \ldots, \tau'_n\}$ von Z'-Partitionen für A' genau dann existieren, wenn A die genannten Eigenschaften hat.

Sei A' eine solche Realisierung. Wir setzen $\mathfrak{z} =_{\mathrm{Df}} \{\zeta^{-1}(z')/z' \in Z'\}$. $\mathfrak{z}$ ist wegen 2.1 (Y-) zulässig. Für $y \in Y$, $x \in X$ und $K \in \mathfrak{z}$ setzen wir ferner $P_y(K, x) =_{\mathrm{Df}} \{\zeta^{-1}(z'')/z'' \in h'_y(\{z'/\zeta^{-1}(z') = K\}, x)\}$. Damit ist wegen

$$\begin{aligned} &\bigcup_{K \in \mathfrak{z} \wedge z \in K} P_y(K, x) = \{\zeta^{-1}(z'')/z'' \in h'_y(\zeta(z), x)\} \stackrel{1.4}{=} \{K'/K' \in \mathfrak{z} \wedge K' \subseteq \\ &\subseteq h_y(z, x)\} \end{aligned}$$

P eine Y-$\mathfrak{z}$-ZÜF von h. Wir zeigen, daß $\mathfrak{M} = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ eine P-unabhängige Menge von $\mathfrak{z}$-Partitionen ist, wenn für $1 \leqq i \leqq n$ $\tau_i =_{\mathrm{Df}} \{\{\zeta^{-1}(z)/z \in N_i'\}/N_i' \in \tau_i'\}$ gesetzt wird.

Für alle $x \in X$, $K \in \mathfrak{z}$ und $y \in Y$ gilt:

$$\forall N_1 \cdots \forall N_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} N_i \in \tau_i \to \bigwedge_{i=1}^{n} \left(N_i \cap P_y(K, x) \neq \emptyset\right) \leftrightarrow \right.$$

$$\exists z \left(\zeta^{-1}(z) = K \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \left(N_i' \cap h_y'(z, x) \neq \emptyset\right)\right) \leftrightarrow$$

$$\exists z \left(\zeta^{-1}(z) = K \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \left(N_i' \cap P_y^Y(z, x) \neq \emptyset\right)\right) \xleftrightarrow{\text{Vorauss.}}$$

$$\exists z \left(\zeta^{-1}(z) = K \wedge \bigcap_{i=1}^{n} \left(N_i' \cap P_y^Y(z, x) \neq \emptyset\right)\right) \leftrightarrow$$

$$\exists z \left(\zeta^{-1}(z) = K \wedge \bigcap_{i=1}^{n} N_i' \cap h_y'(z, x) \neq \emptyset\right) \leftrightarrow$$

$$\left. \bigcap_{i=1}^{n} N_i \cap P_y(K, x) \neq \emptyset\right), \text{ wobei } N_i' \in \tau_i' \text{ und } N_i = \{\zeta^{-1}(z) | z \in N_i'\}.$$

Wegen $\prod_{i=1}^{n} \tau_i' = 0_Z$, ist ferner $\prod_{i=1}^{n} \tau_i = 0_{\mathfrak{z}}$.

Seien nun umgekehrt $\mathfrak{z}$ ein ZZ und P eine Y-$\mathfrak{z}$-ZÜF von h sowie $\mathfrak{M} = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ eine P-unabhängige Menge von $\mathfrak{z}$-Partitionen mit $\prod_{i=1}^{n} \tau_i = 0_{\mathfrak{z}}$ gegeben. Wir konstruieren eine Z-Realisierung A' mit den Eigenschaften 3.3:

$$A' =_{\mathrm{Df}} [X, Y, \mathfrak{z}, h'] \qquad \text{mit} \qquad \zeta(z) = \{K/K \in \mathfrak{z} \wedge z \in K\}$$

und $h_y'(K, x) =_{\mathrm{Df}} P_y(K, x)$ für $x \in X$, $K \in \mathfrak{z}$ und $y \in Y$. Wegen 2.1. (iv) ist die Festlegung $g'(K, x) =_{\mathrm{Df}} \bigcap_{z \in K} g(z, x)$ gerechtfertigt. Weiter gilt $g'(\zeta(z), x)) = \bigcup_{K \in \mathfrak{z} \wedge z \in K} g'(K, x) = \bigcup_{K \in \mathfrak{z} \wedge z \in K} \bigcap_{z' \in K} g(z', x) \underset{2.1.(\mathrm{v})}{=} g(z, x)$. Aus $\bigcup_{K \in \mathfrak{z} \wedge z \in K} h_y'(K, x) = \{K'/K' \in \mathfrak{z} \wedge K' \subseteq h_y(z, x)\} = \zeta(h_y(z, x))$ folgt, da $\mathfrak{z}$ Y-ZZ und P eine Y-$\mathfrak{z}$-ZÜF ist, die Eigenschaft 1.4. (i). 1.4. (ii) gilt wegen $\zeta^{-1}(h_y'(\zeta(z), x)) = \bigcup h_y'(\zeta(z), x)$. A' ist folglich eine Z-Realisierung von A. Wie man unschwer erkennt, sind die durch die $\mathfrak{z}$-Partitionen τ_i aus $\mathfrak{M}$ induzierten Z'-Partitionen τ_i' aus $\mathfrak{M}'$ P^Y-unabhängig. ∎

Ähnlich wie Satz 6.2 von [5] und 3.3 beweist man

3.4. Satz. *A besitzt genau dann eine schleifenfreie ZR-Dekomposition aus n Komponenten, wenn A die Bedingungen von 3.3 erfüllt und darüber hinaus eine Teilmenge $\mathfrak{M}_1 = \max(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ und eine Menge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{z}$-Partitionen existieren mit:*

(i) $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}_1$ *sind P-SPP's, die sämtlich feiner als $1_{\mathfrak{z}}$ sind.*

(ii) $\prod_{\tau \in \overline{\mathfrak{M}}} \tau = 0_{\mathfrak{z}}$.

(iii) *Es gibt eine eindeutige Zuordnung F der $\mathfrak{z}$-Partitionen π aus $\overline{\mathfrak{M}} \cup \{0_{\mathfrak{z}}\}$ zu denen von $\mathfrak{M}$ derart, daß für jedes π aus $\overline{\mathfrak{M}} \cup \{0_{\mathfrak{z}}\}$ $F(\pi) \geqq \pi$ und für π aus $\mathfrak{M}_1$ $F(\pi) = \pi$ ist sowie $\prod_{\pi' \geqq \pi} F(\pi') \leqq \pi$.*

4. Beispiele

Beispiel 1. Gegeben sei der nicht-deterministische Halbautomat (ohne Ausgabe) $A = [\{0, 1\}, \{a, b, c, d\}, f_1]$ mit

f	0	1
a	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
b	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$
c	$\{c, d\}$	$\{a, b, c, d\}$
d	$\{a, b\}$	$\{c\}$

A kann nicht durch zwei Komponenten *isomorph* realisiert werden, da mit $\pi_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\pi_2 = \{\{b, c\}, \{a, d\}\}$, $\pi_3 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ weder $\mathfrak{M}_1 = \{\pi_1, \pi_2\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{\pi_1, \pi_3\}$ noch $\mathfrak{M}_3 = \{\pi_2, \pi_3\}$ f-unabhängig sind.

Es ist $\prod_{z \in Z,\, x \in X} \pi_{f(z, x)} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$. Wegen 2.1. (i) und (ii) wird $\mathfrak{z} = \{\{a, b\}, \{b\}, \{c\}, d\}\}$ gesetzt. Wir definieren P:

P	0	1
$\{a, b\}$	$\{\{a, b\}, \{b\}\}$	$\{\{a, b\}\}$
$\{b\}$	$\{\{a, b\}, \{c\}\}$	$\{\{b\}\}$
$\{c\}$	$\{\{c\}, \{d\}\}$	$\{\{a, b\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$
$\{d\}$	$\{\{a, b\}, \{b\}\}$	$\{\{c\}\}$

P ist Y-$\mathfrak{z}$-ZÜF für f. Die Menge $\mathfrak{M} = \{\tau_1, \tau_2\}$ mit $\tau_1 = \{\{\{a, b\}, \{b\}\}, \{\{c\}, \{d\}\}\}$ und $\tau_2 = \{\{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{b\}, \{d\}\}\}$ ist P-unabhängig und $\tau_1 \cdot \tau_2 = 0_{\mathfrak{z}}$.

Beispielsweise ist mit $P(\{a, b\}, 1) = \{\{a, b\}, \{b\}\} = M$

$$\left.\begin{array}{l} M \cap \{\{a, b\}, \{b\}\} \neq \emptyset \\ M \cap \{\{a, b\}, \{c\}\} \neq \emptyset \end{array}\right\} M \cap \{\{a, b\}, \{b\}\} \cap \{\{a, b\}, \{c\}\} \neq \emptyset$$

$$M \cap \{\{c\}, \{d\}\} = \emptyset$$

$$\left.\begin{array}{l} M \cap \{\{a, b\}, \{b\}\} \neq \emptyset \\ M \cap \{\{b\}, \{d\}\} \quad \neq \emptyset \end{array}\right\} M \cap \{\{a, b\}, \{b\}\} \cap \{\{b\}, \{d\}\} \neq \emptyset$$

usw.

$A' =_{\mathrm{Df}} [\{0, 1\}, \mathfrak{z}, f']$ mit

f'	0	1
$\{a, b\}$	$\{\{a, b\}, \{b\}\}$	$\{\{a, b\}\}$
$\{b\}$	$\{\{a, b\}, \{c\}\}$	$\{\{b\}\}$
$\{c\}$	$\{\{c\}, \{d\}\}$	$\{\{a, b\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$
$\{d\}$	$\{\{a, b\}, \{b\}\}$	$\{\{c\}\}$

oder bei einer Umbenennung der Zustände:

f'	0	1
1	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
2	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
3	$\{3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
4	$\{1, 2\}$	$\{3\}$

Damit sind ζ und ζ^{-1} spezifiziert:

z	a	b	c	d
$\zeta(z)$	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$

z'	1	2	3	4
$\zeta^{-1}(z')$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$

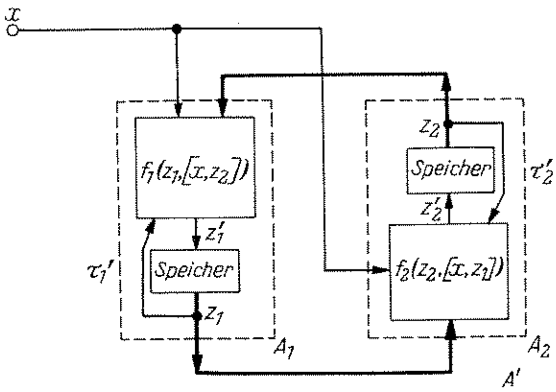

Abb. 2. Dekomposition nach Beispiel 1.

Die Zerlegungen $\tau_1' = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ und $\tau_2' = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ sind f'-unabhängig, A' ist daher zerlegbar in zwei (bistabile) Komponenten A_1 und A_2:

$$A_1 = [\{0, 1\} \times \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}\ ,\ \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, f_1]$$

mit

f_1	$[0, \{1, 3\}]$	$[0, \{2, 4\}]$	$[1, \{1, 3\}]$	$[1, \{2, 4\}]$
$\{1, 2\}$	$\{\{1, 2\}\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$	$\{\{1, 2\}\}$	$\{\{1, 2\}\}$
$\{3, 4\}$	$\{\{3, 4\}\}$	$\{\{1, 2\}\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$	$\{\{3, 4\}\}$

oder bei Umbenennung der Zustände:

f_1	$[0, 0]$	$[0, 1]$	$[1, 0$	$[1, 1]$
0	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$

$$A_2 = [\{0, 1\} \times \{\{1, 2\}, \{3, 4\},\quad \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, f_2]$$

mit

f_2	$[0, \{1, 2\}]$	$[0, \{3, 4\}]$	$[1, \{1, 2\}]$	$[1, \{3, 4\}]$
$\{1, 3\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$	$\{\{1, 3\}\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$
$\{2, 4\}$	$\{\{1, 3\}\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$	$\{\{2, 4\}\}$	$\{\{1, 3\}\}$

oder

f_2	$[0, 0]$	$[0, 1]$	$[1, 0]$	$[1, 1]$
0	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$
1	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$

Abb. 2 zeigt das Netz A' aus A_1 und A_2.

Beispiel 2. Wir betrachten den autonomen NDA $A = [\{x\}, \{a, b, c\}, f$ mit

f	x
a	$\{a, b, c\}$
b	$\{a, b\}$
c	$\{c\}$

A ist nicht *isomorph* realisierbar durch zwei Komponenten. Wir setzen $\mathfrak{z} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$ und P:

K	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{c\}$
$P(K)$	$\{\{c\}\}$	$\{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\{c\}$

Mit $\pi = \{\{\{a\}, \{c\}\}, \{\{a, b\}\}\}$ und $\tau = \{\{\{c\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}\}$ ist $\{\pi, \tau\}$ P-unabhängig, π ist P-SPP, $\mathfrak{N} = \{0_{\mathfrak{z}}\}$ und $\overline{\mathfrak{M}} = \{\pi, 0_{\mathfrak{z}}\}$ mit $F(0_{\mathfrak{z}}) = \tau$.

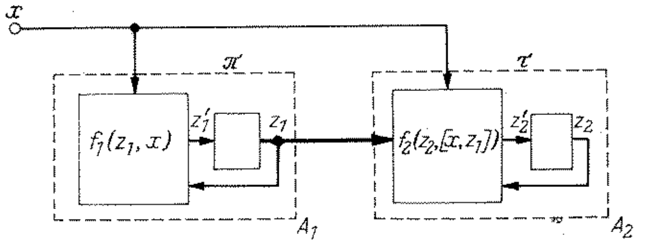

Abb. 3. Schleifenfreie Dekomposition (Beispiel 2).

Daraus ergeben sich die Komponenten

$$A_1 = [\{x\}, \{\{\{a\}, \{c\}\}, \{\{a, b\}\}\}, f_1] \text{ und } A_2 = [\{x\} \times \{\{\{a\}, \{c\}\}, \{\{a, b\}\}\}, \{\{\{c\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}\}, f_2]$$

mit

f_1	x
$\{\{a\}, \{c\}\}$	$\{\{\{a\}, \{c\}\}\}$
$\{\{a, b\}\}$	$\{\{\{a\}, \{c\}\}, \{\{a, b\}\}\}$

f_2	$[x, \{\{a\}, \{c\}\}]$	$[x, \{\{a, b\}\}]$
$\{\{c\}\}$	$\{\{\{c\}\}\}$	beliebig
$\{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\{\{\{c\}\}\}$	$\{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}$

oder bei Umbenennung der Zustände:

f_1	x
0	$\{0\}$
1	$\{0, 1\}$

f_2	$[x, 0]$	$[x, 1]$
0	$\{0\}$	beliebig
1	$\{0\}$	$\{1\}$

A_1 kann als nicht-deterministische Quelle und A_2 als einfacher Delay-Flip-Flop aufgefaßt werden. Die Verknüpfung dieser beiden Komponenten zum Netz A' zeigt Abb. 3. ▮

5. Diskussion

Der hier diskutierte Netzbegriff führt zu der sehr einschränkenden Forderung der P-Unabhängigkeit an die Menge $\mathfrak{M}$ der Kodierungspartitionen. Die Aktion jeder Komponente wird nur in Abhängigkeit von der *gegenwärtigen* Situation des gesamten Netzes bestimmt, also unabhängig davon, wie sich andere Komponenten verhalten. Läßt man zu, daß für eine feste Anordnung $A_1, \ldots, A_n$ der Netzkomponenten jeder Komponente A_i Information sowohl über die gegenwärtige Situation des Netzes als auch über die bereits ermittelten *Folgezustände* der Komponenten A_j mit $1 \leq j \leq i$ zur Verfügung steht, dann kann die Forderung nach Unabhängigkeit der Kodierungspartitionen fallengelassen werden (vgl. Abb. 4). Offensichtlich gilt dann der aus der Dekompo-

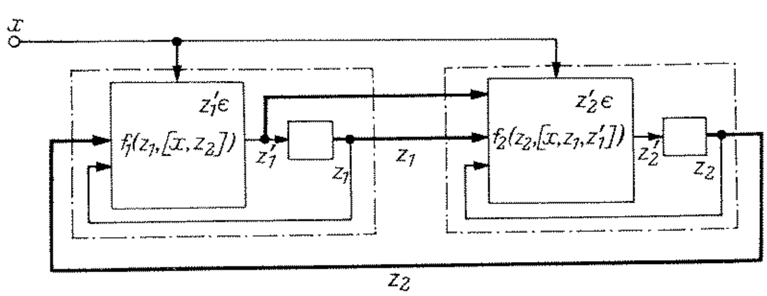

Abb. 4. Netzkonzeption, bei der die zweite Komponente zusätzlich vom Folgezustand der ersten abhängt. Jeder NDA ist auf diese Weise isomorph dekomponierbar, da sich jede nicht-deterministische Funktion $f\colon Z_1 \times Z_2 \times X \to \mathfrak{P}^*(Z_1 \times Z_2)$ zerlegen läßt in f_1 und f_2 mit $f_1\colon Z_1 \times X \times Z_2 \to \mathfrak{P}^*(Z_1)$ und $f_2\colon Z_2 \times X \times Z_1 \times Z_1 \to \mathfrak{P}^*(Z_2)$, wobei

$$f([z_1, z_2], x) = \bigcup_{z_1' \in f_1(z_1, [x, z_2])} \{z_1'\} \times f_2(z_2, [x, z_1, z_1']) \text{ gilt.}$$

sitionstheorie determinierter Automaten bekannte Satz, daß jeder endliche Automat eine (nichttriviale) isomorphe Dekomposition besitzt, auch für nicht-deterministische (und analog für stochastische) Automaten. (Mengen beliebiger nicht-trivialer Partitionen, deren Produkt gleich 0_Z ist, sind dann für die Kodierung verwendbar.)

Neben einer weiteren Netzkonzeption, wo die *Ausgabe* vom bereits realisierten Folgezustand des Halbautomaten abhängt (bei 1.4 hängt umgekehrt der Folgezustand vom bereits ermittelten Ausgabesignal ab), gibt es die Möglichkeit, sich ganz auf nicht-deterministische Halbautomaten zu beschränken. Dabei geht man — etwa Santos [3] folgend[1]) — zu dem äquivalenten Moore-Automaten $A_M = [X, Y, Y \times Z, f_M, m]$ des vorliegenden NDA $A = [X, Y, Z, h]$, mit $[y, z'] \in f_M(z, x) \underset{\mathrm{Df}}{\leftrightarrow} [y, z'] \in h(z, x)$ und $m([y, z']) = \{y\}$ über und ermittelt eine ZR-Dekomposition A' des Halbautomaten $[X, Y \times Z, f_M]$ (falls sie existiert) mit $\zeta\colon Y \times Z \to \mathfrak{P}^*(Z')$.

Noch ungelöst ist das Problem, ein vom Probiereralgorithmus verschiedenes Verfahren für die Gewinnung aller Tripel $[\mathfrak{z}, P, \mathfrak{M}]$ mit den obengenannten Eigenschaften zu finden. Natürlich ist es möglich, für ein $ZZ\,\mathfrak{z}$, eine Y-$\mathfrak{z}$-ZÜF P und $\mathfrak{z}$-Partition π und alle $\mathfrak{z}$-Partitionen τ mit $\pi \cdot \tau = 0_{\mathfrak{z}}$ die P-Unabhängigkeit von $\{\pi, \tau\}$ zu testen oder für gegebenes $\mathfrak{z}, \pi$ und τ iterativ eine Y-$\mathfrak{z}$-ZÜF P zu konstruieren, für die $\{\pi, \tau\}$ P-unabhängig ist — oder festzustellen, daß es kein solches P gibt. Für größere Systeme ist diese Methode offensichtlich zu aufwendig und unübersichtlich.

---

[1]) Santos [3] betrachtet stochastische Automaten der Form $[X, Y, Y \times Z, H]$, d. h. Automaten, deren Verhalten auch noch vom letzten Ausgabesignal abhängen kann. Das ist offensichtlich ein Moore-Automat mit determinierter Ausgabefunktion M (Markierung), wobei $M[[y, z]](y') = 1$ ist genau dann, wenn $y' = y$.

Die vorliegende Arbeit wurde im Forschungsseminar „Grundlagen diskreter Systeme" der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin vorgetragen und diskutiert. Ich danke Herrn Doz. Dr. P. Starke für seine kritischen Hinweise, die zu einer verbesserten Darstellung von Satz 2.1 führten.

Literatur

[1] Bacon, G. C., The decomposition of stochastic automata. Inform. and Control 7 (1964), 320–339.

[2] Hartmanis, J., Stearns, R. E., Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (N. J.) 1966.

[3] Santos, E. S., Algebraic structure theory of stochastic machines. Proc. of the 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, Assoc. Computing Machinery, New York 1971, 219–243.

[4] Starke, P. H., Abstrakte Automaten. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969. (Translation: Abstract automata, Elsevier/North-Holland, Amsterdam 1972.)

[5] Zech, K.-A., Homomorphe Dekomposition stochastischer und nicht-deterministischer Automaten. EIK 7 (1971) 5/6, 297–316.

Kurzfassung

Es wird ein allgemeiner Realisierungsbegriff für nicht-deterministische Automaten (NDA) vorgeschlagen, bei dem alle Zuweisungsfunktionen nicht-deterministisch sind. Ein Spezialfall dieser Konzeption, die Realisierung des Zustandsverhaltens, wird diskutiert. Für die Existenz einer Dekomposition (Zerlegung) eines NDA in ein allgemeines bzw. schleifenfreies Automatennetz, das das Zustandsverhalten des NDA realisiert, werden auf der Grundlage der Partitionentheorie notwendige und hinreichende Bedingungen ermittelt.

Abstract

The paper proposes a general conception of the realization of non-deterministic automata (NDA), all assignment functions of which are non-deterministic. A special type of these realizations, the state-behaviour realization, is discussed. Neccessary and sufficient conditions for a NDA to have a general or loop-free decomposition into a network of automata realizing the state behaviour of the NDA are developed in terms of partition theory.

Резюме

Предлагается общее понятие такой реализации недетерминированных автоматов, при которой определяющие функции недетерминированы. Рассматривается частный случай этой концепции — реализация поведения состояний. На основе теории разложения множеств определяются необходимые и достаточные условия для существования декомпозиции [т. е. разложения автомата] недетерминированного автомата в общую или каскадную сеть автоматов.

(Eingegangen am 2. 1. 1973)

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. K. A. Zech
1058 Berlin
Oderberger Str. 42
DDR